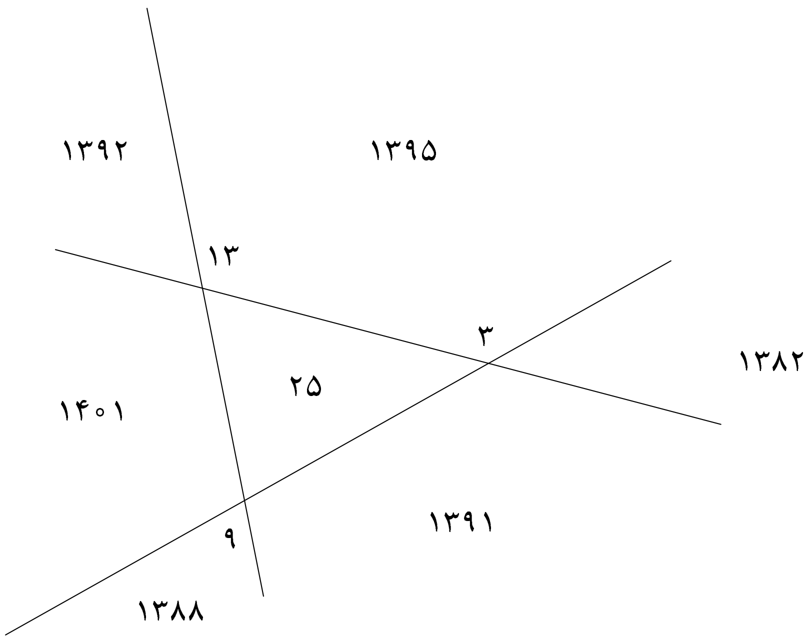
مسأله‌ی اول: ناحیه‌ها .... ۱۰ امتیاز

n خط روی صفحه داده شده‌اند، به‌طوری‌که هیچ دو خطی موازی و هیچ سه خطی همرس نیستند (به عبارت دیگر، هر دو خط دل‌خواه یک نقطه‌ی تلاقی منحصر به فرد دارند). روی هر نقطه‌ی تلاقی یک عدد دل‌خواه نوشته شده است. این n خط صفحه را به تعدادی ناحیه تقسیم می‌کنند که بعضی از آن‌ها بسته و بعضی باز هستند. به هر ناحیه‌ی بسته یا باز یک عدد نسبت می‌دهیم که از مجموع اعداد نقاط دور آن ناحیه به‌دست می‌آید. برای ناحیه‌های باز عدد ۱۳۷۹ را نیز به عدد محاسبه شده اضافه می‌کنیم. شکل زیر یک مثال برای $n = ۳$ است. در این مثال اعداد روی نقاط تقاطع ۱۳،۹ و ۳ هستند.



ثابت کنید اگر n مضرب ۴ باشد، آن‌گاه همه‌ی اعداد ناحیه‌ها نمی‌توانند فرد باشند.

مسأله‌ی دوم: چراغ‌ها .... ۱۰ امتیاز

روی یک خط، n چراغ با شماره‌های ۱ تا n قرار دارند که تعدادی از آن‌ها خاموش و بقیه روشن هستند. دو نفر به نام‌های A و B این بازی را با هم انجام می‌دهند. از ابتدا و در تمام مراحل بازی، چشم B بسته است و او وضعیت لامپ‌ها را نمی‌داند. در هر مرحله از بازی، B مجموعه‌ای از اعداد ۱ تا n را انتخاب می‌کند و به A می‌گوید. A لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها در آن مجموعه است را تغییر وضعیت می‌دهد؛ یعنی اگر لامپ خاموش بود، آن را روشن و اگر روشن بود آن را خاموش می‌کند. مثلاً اگر ۳ لامپ داشته باشیم و لامپ‌های ۱ و ۳ خاموش باشند و لامپ ۲ روشن باشد و B مجموعه‌ی $\{۱,۲\}$ را انتخاب کند، در مرحله‌ی بعد لامپ ۱ روشن و لامپ‌های ۲ و ۳ خاموش خواهند شد.
در هر مرحله‌ای که تمام لامپ‌ها خاموش شوند بازی به نفع B تمام می‌شود. مثلاً اگر $n = ۲$ و B به‌ترتیب مجموعه‌های $\{۱,۲\},\{۱\},\{۱,۲\}$ را انتخاب کند، به هر ترتیب B برنده‌ی بازی خواهد شد. ثابت کنید برای هر n، B می‌تواند طوری بازی کند که ببرد. یعنی می‌تواند دنباله‌ای از زیرمجموعه‌های $\{۱,۲,\cdots,n\}$ را انتخاب کند که برای هر وضعیت اولیه‌ی دل‌خواه از چراغ‌ها در حین انجام عمل به جایی برسیم که همه‌ی چراغ‌ها خاموش باشند.

مسأله‌ی سوم: رمزیابی .... ۱۵ امتیاز

رشته‌ی S را با n حرف در نظر بگیرید. مجموعه‌ی جایگشت‌های دوری S به نام R را به‌صورت $R = \{S_۱, S_۲, \cdots, S_n\}$ نشان می‌دهیم به‌طوری‌که $S_۱ = S$ و $S_{i+۱}$ $(۱ \leq i < n)$ را از S_i به این شرح به‌دست می‌آوریم: حرف انتهایی S_i را برمی‌داریم و در اول رشته‌ی باقیمانده قرار می‌دهیم.
یک روش رمزکردن رشته‌ی S به این صورت است: رشته‌های $S_۱$ تا S_n را به‌ترتیب الفبایی مرتب می‌کنیم و رشته‌های مرتب شده را به‌ترتیب در سطرهای یک جدول $n \times n$ قرار می‌دهیم. مثلاً جدول متناظر رشته‌ی banan مطابق شکل زیر است:

$$\begin{array}{lccccc c ccccc}
S_۱= & b & a & n & a & n & & a & n & a & n & b \\
S_۲= & n & b & a & n & a & & a & n & b & a & n \\
S_۳= & a & n & b & a & n & \Longrightarrow & b & a & n & a & n \\
S_۴= & n & a & n & b & a & & n & a & n & b & a \\
S_۵= & a & n & a & n & b & & n & b & a & n & a
\end{array}$$

رمز شده‌ی رشته‌ی S از دو قسمت تشکیل شده است: قسمت اول رشته‌ای است که از حروف ستون آخر جدول از بالا به پایین به دست می آید و قسمت دوم شماره‌ی سطر S در جدول است. با توجه به جدول بالا رمزشده‌ی banan، زوج (bnnaa, ۳) است. ثابت کنید این روش رمز کردن برگشت‌پذیر است. به‌عبارت دیگر ثابت کنید می‌توان از هر زوج رمزشده‌ی متناظر یک رشته، به رشته‌ی منحصر به فرد اولیه رسید. روشی برای به‌دست آوردن رشته‌ی اولیه بیان کنید. روش خود را به‌صورت دقیق و گام‌به‌گام بیان کنید و مراحل مختلف آن را برای رمزیابی زوج (sfaraf, ٦) نشان دهید.

مسأله‌ی چهارم: جدول عجیب .... ۱۵ امتیاز

جدولی را در نظر بگیرید که از سمت چپ، راست و پایین نامتناهی است و فقط از طرف بالا محدود می‌باشد . بالاترین سطر جدول سطر شماره‌ی ۱ است و سطرها به طرف پایین شماره‌گذاری می‌شوند. در سطر اول در یک خانه عدد ۱ و در بقیه‌ی خانه‌های آن عدد صفر نوشته شده است. در سطرهای بعد یک خانه مقدار ۱ دارد اگر و فقط اگر دقیقاً یکی از خانه‌های چپ و راستِ خانه‌ی بالای آن ۱ باشد، در غیر این‌صورت مقدارش صفر خواهد بود. در مثال زیر چند سطر اول این جدول نوشته شده است.

سطر اول	...	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	...
سطر دوم	...	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	...
سطر سوم	...	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	...
سطر چهارم	...	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	...
سطر پنجم	...	۰	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۰	...
سطر ششم	...	۰	۱	۰	۱	۰	۰	۰	۰	۰	۱	۰	۱	۰	...

سطر ۱۳۷۹ ام این جدول حاوی چند عدد ۱ است؟ روش محاسبه‌ی خود را دقیقاً بیان و اثبات کنید.