پاسخ تشریحی

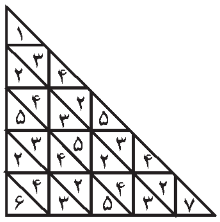
سیزدهمین المپیاد کامپیوتر

۱. کافی است ثابت کنیم جای هر دو عدد مانند x و y را می‌توانیم عوض کنیم، بدون آن‌که جای بقیه اعداد عوض شود:

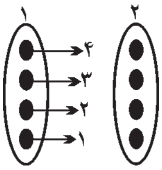
- اگر $|x-y| \geq ۲$ آنگاه جای آن دو عدد را با هم عوض می‌کنیم.
- اگر $|x-y| < ۲$ آنگاه عددی مانند z وجود دارد به‌طوری که $|x-z| \geq ۲$ و $|y-z| \geq ۲$. در این‌صورت جای x را با z و سپس جای z را با y عوض می‌کنیم که در این صورت فقط جای دو عدد x و y با هم عوض خواهد شد.

۲. چون ثانیه‌شمارِ صفحه A ثابت است، باید بقیه ثانیه‌شمارها (که متحرک هستند) مثل آن ثانیه‌شمار باشند. این موضوع برای عقربه‌های دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار نیز مصداق دارد. بنابراین تنها حالتی که هر سه عقربه در هر سه ساعت وضعیت مشابه دارند در ساعت ۱۰:۱۵′:۳۰″ می‌باشد. لازم به ذکر است که صفحات آن سه ساعت نیز مشابه هم خواهد بود چون در هر لحظه در هر یک از آنها، صفحات چنان می‌چرخند که ساعت زمان درست را نشان دهد. بنابراین از هر ۱۲ ساعت یک‌بار، وضعیت سه ساعت کاملاً مشابه به هم خواهد بود که در طول ۵۰ ساعت، با احتساب حالت اولیه، دقیقاً ۵ بار آن وضعیت اتفاق خواهد افتاد.

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵



۳. مثلثی که از امتداد دادن دو ضلع از سه ضلع مثلثی پدید می‌آید را «مقابل» آن مثلث گوییم. با کمی توجه معلوم می‌شود که در هر مرحله می‌توان مهره را از یک خانه به خانه مقابل آن برد. در شکل مقابل تمام خانه‌هایی که مستقیم و یا با واسطه می‌توانند مقابل هم باشند با یک عدد مشابه، شماره‌گذاری شده‌اند که بیشترین خانه‌ها با عدد مشابه، ۶ تا می‌باشند که تعداد حرکات لازم برای گذر از آن ۶ خانه کمتر از ۲۰ می‌باشد.



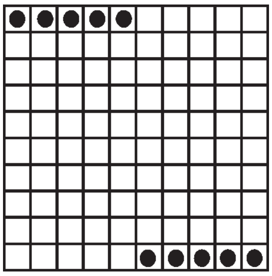
۴. در شکل مقابل مقصد هر یک از پاره‌خط‌های خارج شده از چهار نقطه به‌ترتیب به ۴، ۳، ۲ و ۱ طریق مشخص می‌شود که طبق اصل ضرب تعداد کل حالات برابر !۴ می‌شود. این موضوع از دسته ۲ به دسته ۳ و از دسته ۳ به دسته ۴ و نیز از دسته ۴ به دسته ۱ نیز به همین صورت است. بنابراین جواب مورد نظر $(۴!)^۴$ یا $۴^۴ \times ۳^۴ \times ۲^۴$ می‌باشد.

۵. در مرحله دوم خانه مورد نظر سفید و هر چهار خانه مجاور آن سیاه هستند، بنابراین در مرحله سوم نیز آن خانه سفید باقی خواهد ماند. در حقیقت در هر مرحله هر چهار خانه مجاور آن خانه یا سفید هستند و یا سیاه، بنابراین هرگز آن خانه سیاه نخواهد شد.

۶. معلوم است که با جمع کردن تعدادی از اعداد $\{۱, ۲, ۴\}$ همه اعداد از ۱ تا ۷ را به شکل زیر می‌توان تولید کرد:

۳ : ۱ + ۲	۲ : ۲	۱ : ۱
۶ : ۲ + ۴	۵ : ۱ + ۴	۴ : ۴
		۷ : ۱ + ۲ + ۴

حال باید توجه کرد که اگر زیرمجموعه دلخواهی از $A = \{۳, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹, ۱۰\}$ را در نظر بگیریم، بستگی به این که مجموع اعضای آن زیرمجموعه در تقسیم بر ۸ چه باقی‌مانده‌ای داشته باشد، می‌توان زیرمجموعه‌ای از مجموعه $\{۱, ۲, ۴\}$ به آن اضافه کرد تا حاصل بر ۸ بخش‌پذیر باشد. اگر مجموع اعضای مجموعه تهی را ۰ در نظر بگیریم که بر ۸ بخش‌پذیر است، آنگاه به‌ازای هر زیرمجموعه دلخواهی از مجموعه A که تعداد آنها $۲^۷$ یعنی ۱۲۸ است یک و فقط یک زیرمجموعه به‌صورت مطلوب یافت خواهد شد.



۷. معلوم است که اگر تعداد رخ‌ها کمتر از ۱۰ باشد همه خانه‌ها تهدید نخواهند شد زیرا در این صورت خانه‌ای وجود خواهد داشت که نه در سطرش مهره باشد و نه در ستونش. با ۱۰ رخ مطابق شکل مقابل می‌توان به جواب رسید.

۸. چون مقدار هر دو مؤلفه افزایش یافته‌اند و از بین دو دستور A و B فقط دستور A مقدار مؤلفه را افزایش می‌دهد معلوم می‌شود که در طول برنامه حتماً باید از دستور C استفاده کرد. از طرف دیگر چون دو عدد ۱ و ۵ به‌اندازه ۴ واحد از هم اختلاف دارند (که مضرب ۳ نیست) بنابراین لازم است از دستور B نیز حتماً استفاده شود و در ضمن در هر مرحله حداکثر ۳ واحد به مجموع مؤلفه‌ها (که در ابتدا ۲ + ۱ یعنی ۳ و در انتها ۵+۸ یعنی ۱۳ می‌باشد) اضافه می‌شود، بنابراین حداقل ۴ بار نیز باید از دستور A استفاده کرد که در این صورت حداقل ۶ دستور نیاز خواهد بود. با ۶ دستور به شکل زیر می‌توان به هدف رسید:

$$(۲,۱) \xrightarrow{A} (۵,۱) \xrightarrow{B} (۵,-۱) \xrightarrow{C} (-۱,۵) \xrightarrow{A} (۲,۵) \xrightarrow{A} (۵,۵) \xrightarrow{A} (۸,۵)$$

۹. اگر مجاز نبودیم از دستور C استفاده کنیم، آنگاه تعداد برنامه‌های مطلوب برابر با ۶ می‌شد که به شکل زیر می‌باشند:

BAAB BABA BBAA ABBA ABAB AABB

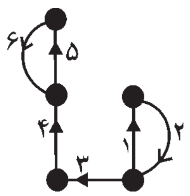
حال که قرار است دقیقاً یک عدد دستور C در لابه‌لای دستورها قرار داده شود، آن را در جای دلخواه قرار داده و تمام دستورهای بعد از آن را تعویض می‌کنیم (A را به B و B را به A تبدیل می‌کنیم)، که در این صورت هر برنامه به‌دست آمده برنامه مطلوب خواهد شد. به‌عنوان مثال اگر حرف C را به‌عنوان دومین حرف از سمت چپ برنامه ABAB قرار دهیم آن برنامه به شکل ACABA تغییر خواهد یافت که نقطه (۰ , ۰) را به (۲ , ۲) تبدیل می‌کند.

چون در هر مورد برای C پنج جای متمایز وجود دارد. بنابراین تعداد دنباله‌های مطلوب ۵×۶ یعنی ۳۰ خواهد شد.

۱۰. حرکت به سمت‌های راست، چپ، بالا و پایین را به‌ترتیب r، l، u و d نمایش می‌دهیم. حال گزینه‌ها را

یکی پس از دیگری امتحان کرده و جایگاه آنها را مشخص می‌کنیم:

الف) عدد ۶۰۳۹ به‌صورت ۴k + ۳ می‌باشد، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۶۰۳۹ - ۳}{۴}$ یعنی ۱۵۰۹ می‌باشد. عدد ۱۵۰۹ به‌صورت ۴k + ۱ می‌باشد، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۱۵۰۹ - ۱}{۴}$ یعنی ۳۷۷ می‌باشد. عدد ۳۷۷ به‌صورت ۴k + ۱ می‌باشد. بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن $\frac{۳۷۷ - ۱}{۴}$ یعنی ۹۴ می‌باشد. عدد ۹۴ به‌صورت ۴k + ۲ می‌باشد، بنابراین حرکت آخر l بوده و عدد قبل از آن $\frac{۹۴ - ۲}{۴}$ یعنی ۲۳ می‌باشد. عدد ۲۳ به‌صورت ۴k + ۳ می‌باشد، بنابراین حرکت آخر d بوده و عدد قبل از آن $\frac{۲۳ - ۳}{۴}$ یعنی ۵ می‌باشد. عدد ۵ به‌صورت ۴k + ۱ می‌باشد، بنابراین حرکت آخر u بوده و عدد قبل از آن ۱ می‌باشد.



با توجه به توضیحات فوق معلوم می‌شود که عدد ۶۰۳۹ بعد از دنباله udluud نوشته می‌شود که جایگاه آن با توجه به شکل زیر در نقطه (۱- , ۱-) خواهد بود:

ب)

۱۰۸۲ = ۴k + ۲ ⇒ k = ۲۷۰	,	حرکت = l
۲۷۰ = ۴k + ۲ ⇒ k = ۶۷	,	حرکت = l
۶۷ = ۴k + ۳ ⇒ k = ۱۶	,	حرکت = d
۱۶ = ۴k ⇒ k = ۴	,	حرکت = r
۴ = ۴k ⇒ k = ۱	,	حرکت = r

عدد ۱۰۸۲ بعد از دنباله rrdll نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱- , ۰) می‌باشد.

ج)

۱۳۴۷ = ۴k + ۳ ⇒ k = ۳۳۶	,	حرکت = d
۳۳۶ = ۴k ⇒ k = ۸۴	,	حرکت = r
۸۴ = ۴k ⇒ k = ۲۱	,	حرکت = r
۲۱ = ۴k + ۱ ⇒ k = ۵	,	حرکت = u
۵ = ۴k + ۱ ⇒ k = ۱	,	حرکت = u

عدد ۱۳۴۷ بعد از دنباله uurrd نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱ , ۲) می‌باشد.

د)

$۵۱۳۲ = ۴k \Rightarrow k = ۱۲۸۳$, حرکت = r

$۱۲۸۳ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۳۲۰$, حرکت = d

$۳۲۰ = ۴k \Rightarrow k = ۸۰$, حرکت = r

$۸۰ = ۴k \Rightarrow k = ۲۰$, حرکت = r

$۲۰ = ۴k \Rightarrow k = ۵$, حرکت = r

$۵ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱$, حرکت = u

عدد ۵۱۳۲ بعد از دنباله urrrdr نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۴ , ۰) می‌باشد.

ه)

$۵۹۲۱ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱۴۸۰$, حرکت = u

$۱۴۸۰ = ۴k \Rightarrow k = ۳۷۰$, حرکت = r

$۳۷۰ = ۴k + ۲ \Rightarrow k = ۹۲$, حرکت = l

$۹۲ = ۴k \Rightarrow k = ۲۳$, حرکت = r

$۲۳ = ۴k + ۳ \Rightarrow k = ۵$, حرکت = d

$۵ = ۴k + ۱ \Rightarrow k = ۱$, حرکت = u

عدد ۵۹۲۱ بعد از دنباله udrlru نوشته می‌شود که جایگاه آن نقطه (۱ , ۱) می‌باشد.

۱۱. هر بار که لامپ iاُم از ۰ به ۱ تبدیل می‌شود لامپ‌های سمت چپ آن تغییر نمی‌کنند ولی هرگاه آن لامپ از ۱ به ۰ تبدیل می‌شود لامپ $(i+1)$اُم تغییر وضعیت می‌دهد. بنابراین اگر لامپ iام، $2k$ بار تغییر وضعیت دهد (که k بار آن از ۰ به ۱ و k بار دیگر آن از ۱ به ۰ می‌باشد) آنگاه لامپ $(i+1)$اُم، k بار تغییر وضعیت می‌دهد. معلوم است که لامپ اول ۶۴ بار تغییر وضعیت می‌دهد، بنابراین لامپ‌های دوم، سوم، ... و هفتم به‌ترتیب ۳۲، ۱۶، ۸، ۴، ۲ و ۱ بار تغییر وضعیت خواهند داد. بنابراین:

$$\sum_{i=۱}^{۷} d_i = ۶۴ + ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ = ۱۲۷$$

۱۲. بهترین حالت آن است که در یک روز از جستجو جای دقیق دزد را شناسایی کنیم. چون از هر شهر حداقل به دو شهر دیگر می‌توان رفت، بنابراین با گذشت زمان هرگز جای دقیق دزد معلوم نخواهد شد.

۱۳. شهرها را مطابق شکل مقابل نام‌گذاری می‌کنیم:

● روز اول به شهر A می‌رویم که اگر دزد در آن شهر بود دستگیر می‌کنیم و در غیر این صورت فاصله آن از A را اندازه گرفته و جای دقیق دزد را متوجه می‌شویم که یکی از حالات زیر پیش می‌آید:

□ اگر فاصله ۱ باشد یعنی دزد در شهر B است و در انتهای آن روز به یکی از دو شهر A و یا C خواهد رفت.

● روز دوم به شهر C می‌رویم که اگر دزد در آن‌جا بود دستگیر می‌کنیم، در غیر این صورت او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به ناچار به شهر B خواهد رفت.

● روز سوم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

□ اگر فاصله ۲ باشد آنگاه دزد در شهر C می‌باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر D و یا B خواهد رفت.

● روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می‌کنیم، در غیر این‌صورت او حتماً در شهر B است که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا A خواهد رفت.

● روز سوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه می‌شویم که او حتماً در شهر A است که در انتهای روز به ناچار به شهر B خواهد رفت.

● روز چهارم به شهر B رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

□ اگر فاصله ۳ باشد آنگاه دزد در شهر D می‌باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر C و یا E خواهد رفت.

● روز دوم به شهر C رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر می‌کنیم در غیر این‌صورت او حتماً در شهر E است که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و D خواهد رفت.

● روز سوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه می‌شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.

● روز چهارم به شهر E رفته و او را دستگیر می‌کنیم.

□ اگر فاصله ۴ باشد آنگاه دزد در شهر E می‌باشد که در انتهای روز به یکی از دو شهر F و یا D خواهد رفت.

● روز دوم به شهر D رفته و اگر دزد در آن شهر بود او را دستگیر کرده و در غیر این‌صورت متوجه

می‌شویم که او در شهر F است که در انتهای روز به ناچار به شهر E خواهد رفت.

- روز سوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

□ اگر فاصله ۵ باشد آنگاه دزد در شهر F می‌باشد که در انتهای روز به شهر E خواهد رفت.

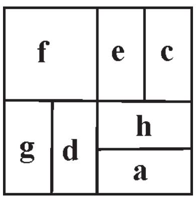
- روز دوم به شهر E رفته و دزد را دستگیر می‌کنیم.

۱۴. اولاً از نابرابری $f(n+۱) > f(n)$ معلوم می‌شود که تابع اکیداً صعودی است، بنابراین رابطه $f(n) \geq n$ برقرار است و چون $f(۱) \neq ۱$، در نتیجه $f(n) > n$ (اگر $f(۱) = ۱$، آنگاه $f(f(۱)) = ۳$ یا $f(۱) = ۳$ که تناقض است).

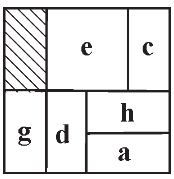
اگر $f(۱) = k \geq ۳$ آنگاه $f(f(۱)) = ۳ \times ۱ = ۳$ یا $f(k) = ۳$ که با $f(n) > n$ در تضاد است، بنابراین $f(۱) = k = ۲$:

$$
\begin{aligned}
f(۱) = ۲ \;&\Rightarrow\; f(f(۱)) = ۳ \;\Rightarrow\; f(۲) = ۳ \\
&\Rightarrow\; f(f(۲)) = ۶ \;\Rightarrow\; f(۳) = ۶ \\
&\Rightarrow\; f(f(۳)) = ۹ \;\Rightarrow\; f(۶) = ۹ \\
&\Rightarrow\; f(f(۶)) = ۱۸ \;\Rightarrow\; f(۹) = ۱۸
\end{aligned}
$$

۱۵. معلوم است که مربعی که از همه بالاتر است مربع B می‌باشد که با برداشتن آن به شکل مقابل خواهیم رسید:



در این حالت باید مربع F را برداریم که شکل باقی‌مانده به شکل زیر خواهد بود:



بعد از این مرحله اولین مربع قابل برداشت، مربع E می‌باشد که در بین گزینه‌ها فقط گزینه «ب» با مطالب اشاره شده سازگاری دارد.

۱۶. معلوم است که تعداد رشته‌های به‌طول i برابر 2^i می‌باشد. بنابراین آخرین رشته ۹ حرفی که به‌صورت bbbbbbbbb می‌باشد رشته هزار و بیست و دوم می‌باشد زیرا:

۱۰۲۲ = ۵۱۲ + ۲۵۶ + ۱۲۸ + ۶۴ + ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲

به تعداد $۲^{۱۰}$ رشته ده حرفی می‌توان ساخت که نصف آنها با حرف a و نصف دیگر با حرف b شروع می‌شوند و چون رشته ۱۳۸۱ اُم به نصفه اول متعلق است، بنابراین آن رشته با حرف a شروع می‌شود. لازم به ذکر است که رشته مورد نظر سیصد و پنجاه و نهمین رشته ده حرف است، زیرا ۳۵۹ = ۱۰۲۲ - ۱۳۸۱ در بین ۵۱۲ رشته‌ای که با a شروع می‌شوند ۲۵۶ تای اول آنها حرف دوم a و ۲۵۶ تای دیگر (که ۳۵۹ نیز به همین دسته متعلق است) حرف دوم b دارند. در بین آن ۲۵۶ رشته، ۱۲۸ تای اول حرف سوم a و ۱۲۸ تای دوم حرف سوم b دارند (چون ۱۲۸ > ۱۰۳ = ۲۵۶ - ۳۵۹، بنابراین رشته مورد نظر به دسته اول تعلق دارد). اگر به همین ترتیب ادامه دهیم خواهیم داشت:

a = حرف اول $\Rightarrow$ ۱۳۸۱ - ۱۰۲۲ = ۳۵۹ < ۵۱۲

b = حرف دوم $\Rightarrow$ ۳۵۹ > ۲۵۶

a = حرف سوم $\Rightarrow$ ۳۵۹ - ۲۵۶ = ۱۰۳ < ۱۲۸

b = حرف چهارم $\Rightarrow$ ۱۰۳ > ۶۴

b = حرف پنجم $\Rightarrow$ ۱۰۳ - ۶۴ = ۳۹ > ۳۲

a = حرف ششم $\Rightarrow$ ۳۹ - ۳۲ = ۷ < ۱۶

a = حرف هفتم $\Rightarrow$ ۷ < ۸

b = حرف هشتم $\Rightarrow$ ۷ > ۴

b = حرف نهم $\Rightarrow$ ۷ - ۴ = ۳ > ۲

a = حرف دهم $\Rightarrow$ ۳ - ۲ = ۷ = ۱

۱۷. مجموع سکه‌های ۲ تومانی حداکثر برابر ۲۰ می‌تواند باشد، بنابراین تعداد کاسه‌های شامل ۵ تومانی حداقل برابر ۱۳ و حداکثر برابر ۱۵ می‌باشد. چون مجموع سکه‌های ۲ تومانی زوج است، بنابراین مجموع سکه‌های ۵ تومانی باید فرد باشد، بنابراین تعداد کاسه‌های شامل ۵ تومانی یا برابر ۱۳ است (که در این‌صورت تعداد کاسه‌های شامل ۲ تومانی برابر ۸ خواهد بود) و یا تعداد آن کاسه‌ها برابر ۱۵ است (که در

این صورت تعداد کاسه‌های شامل ۲ تومانی برابر ۳ خواهد بود)، بنابراین جواب به شکل زیر خواهد بود:

$$? = \binom{20}{13} \times \binom{10}{8} + \binom{20}{15} \times \binom{10}{3}$$

۱۸. اگر دنباله داده شده را به‌صورت a_1، a_2، a_3، ...، a_n تصور کنیم آنگاه دنباله b_0، b_1، b_2، ...، b_n را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases} b_0 = 0 \\ b_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_i \end{cases}$$

بنابراین دنباله جدید به شکل زیر به‌دست خواهد آمد:

۰، ۲، ۲، ۲، ۵، ۵، ۶، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۴، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷

اگر b_k و b_l در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده یکسان داشته باشند، آنگاه $b_k - b_l$ مضرب ۵ بوده و معلوم خواهد شد که زیر دنباله a_k، ...، a_{l+2}، a_{l+1} مضرب ۵ است. بنابراین کافی است زوج b_i هایی را پیدا کنیم که در تقسیم بر ۵ باقی‌مانده یکسانی دارند. b_i ها متناسب با باقی‌مانده بر ۵ به پنج دسته زیر افراز می‌شوند:

۰ : ۰، ۵، ۵، ۱۰، ۲۵

۱ : ۶، ۱۱، ۲۶

۲ : ۲، ۲، ۲، ۲۲، ۲۷

۳ : ۲۳

۴ : ۹، ۱۴، ۲۴

به‌ازای انتخاب هر دو عضو از یک دسته به یک زیردنباله مضرب ۵ خواهیم رسید، بنابراین:

$$? = \binom{5}{2} + \binom{3}{2} + \binom{5}{2} + \binom{3}{2} = 26$$

۱۹. حداکثر تعداد نفرات برای موقعی است که در هر یک از ردیف‌های ۱، ۶، ۱۱، ۱۶، ...، ۹۶ و ۱۰۱ دقیقاً ۲۰۰ نفر و در هر یک از سایر ردیف‌ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات ۲۰۰ × ۲۱ یعنی ۴۲۰۰ خواهد شد. حداقل تعداد نفرات نیز برای موقعی است که در هر یک از ردیف‌های ۵، ۱۰، ۱۵، ... و ۱۰۰ دقیقاً ۲۰۰ نفر و در هر یک از سایر ردیف‌ها ۰ نفر نشسته باشند که در این حالت تعداد نفرات ۲۰۰ × ۲۰ یعنی ۴۰۰۰ خواهد شد.

۲۰.

● اگر نفر اول در ابتدا ۱ و در انتها a× را انتخاب کند (اگر نفر دوم ۰ را انتخاب کند a برابر ۲ و اگر نفر دوم ۲ را انتخاب کند آنگاه a برابر ۰ است) حاصل عدد به‌دست آمده مستقل از علامت انتخابی نفر دوم زوج خواهد شد.

● اگر نفر اول عدد ۱ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب ۲× مستقل از انتخاب آخرِ نفر اول می‌تواند حاصل را زوج کند. و اما اگر نفر اول عدد ۰ و یا ۲ را انتخاب کند آنگاه نفر دوم با انتخاب ۱× مستقل از انتخاب آخرِ نفر اول می‌تواند حاصل را زوج کند.

۲۱. تعداد دایره‌ها، مثلث‌ها و مربع‌های موجود در مرحله n ام را به‌ترتیب با $D(n)$، $S(n)$ و $R(n)$ نمایش می‌دهیم که در این صورت خواهیم داشت:

$D(۱) = ۱ \quad , \quad S(۱) = ۲ \quad , \quad R(۱) = ۰$

$D(n) = D(n - ۱) + R(n - ۱)$

$R(n) = S(n - ۱)$

$S(n) = D(n)$

بنابراین به جواب زیر خواهیم رسید:

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
D	۱	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
S	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳	۱۹۹
R	۰	۲	۱	۳	۴	۷	۱۱	۱۸	۲۹	۴۷	۷۶	۱۲۳

با توجه به جدول فوق معلوم می‌شود که در انتهای مرحله ۱۱ تعداد مثلث‌ها برابر ۱۲۳ می‌باشد.

۲۲. خطوط افقی و عمودی مربوط به نقطه i حداکثر یکی از خطوط افقی و یا عمودی مربوط به نقطه j را قطع می‌کنند. بنابراین با اضافه شدن نقطه k ام حداکثر $(k - ۱)$ نقطه تلاقی جدید پدید می‌آید که به‌ازای حداقل یکی از نقاط تلاقی ناحیه باز و به‌ازای حداکثر $(k - ۲)$ نقطه تلاقی دیگر ناحیه بسته ایجاد می‌شود. بنابراین اگر حداکثر تعداد ناحیه‌های بسته برای k نقطه را با $D(k)$ نشان دهیم

رابطه $D(k) = D(k-1) + k - 2$ برقرار خواهد بود. از طرف دیگر چون $D(2) = 0$، بنابراین:

$D(3) = D(2) + 1 = 1$

$D(4) = D(3) + 2 = 3$

$D(5) = D(4) + 3 = 6$

$D(6) = D(5) + 4 = 10$

$D(7) = D(6) + 5 = 15$

۲۳. اگر تصور کنیم که در حرکت iام به‌اندازه i واحد به جلو بجهد آنگاه خواهیم داشت:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < 1381 < 1 + 2 + 3 + \dots + (n+1)$$

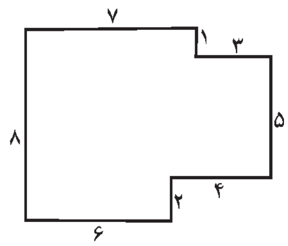
$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} < 1381 \Rightarrow n(n+1) < 2762 \Rightarrow n < 53$$

به‌ازای $n = 52$ و در حالتی که قورباغه در حرکت iام به‌اندازه i واحد بجهد به نقطه $\frac{52 \times 53}{2}$ یعنی ۱۳۷۸ خواهد رسید. بنابراین کافی است برای رسیدن به نقطه ۱۳۸۱ در ۵۲ حرکت، فقط در سه جهش از ۵۲ جهش به جای i واحد جهیدن، به‌اندازه $i + 1$ واحد بجهد.

اگر تصور کنیم که قورباغه از حرکت ۵۲ به بعد در هر حرکت کمترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از ۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۵۶ خواهد رسید زیرا: $(1381) + 53 + 54 + 55 + \dots + 62 = 1956$. و اگر قورباغه در هر حرکت بیشترین مقدار ممکن را بجهد آنگاه بعد از ۱۰ حرکت به نقطه ۱۹۶۶ خواهد رسید که عقب‌تر از نقطه ۲۰۰۳ می‌باشد. اما نقطه مقصد بعد از ۱۱ حرکت به‌ترتیب در حالاتی که قورباغه کمترین مقدار و نیز بیشترین مقدار را بجهد برابر ۲۰۱۹ و ۲۰۳۰ می‌شود، به این معنا که رسیدن به نقطه ۲۰۰۳ از نقطه ۱۳۸۱ با شرایط اشاره شده غیر ممکن است.

۲۴. اگر از یک نقطه از محیط چندضلعی اشاره شده، شروع و در یک جهت محیط آن را طی کنیم تا به نقطه شروع بازگردیم آنگاه تعداد واحدهایی که به سمت راست حرکت می‌کنیم با تعداد واحدهایی که به سمت چپ حرکت می‌کنیم برابر است و این موضوع برای جهت‌های بالا و پایین نیز صحیح است، به این معنا که مجموع واحدهای عمودی و نیز مجموع واحدهای افقی زوج است که زوج بودن کل محیط n

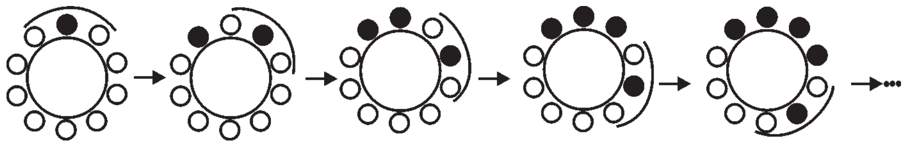
ضلعی را نتیجه می‌دهند.



به‌ازای n = ۴ به مستطیل می‌رسیم که طول دو ضلع مقابل آن با هم برابر است و شرایط مسأله را برآورده نمی‌کند. به‌ازای n = ۶ چون مجموع اعداد از ۱ تا ۶ برابر ۲۱ بوده و فرد است، شرایط مسأله برآورده نمی‌شود. به‌ازای n = ۸ به شکلی مانند شکل مقابل می‌رسیم:

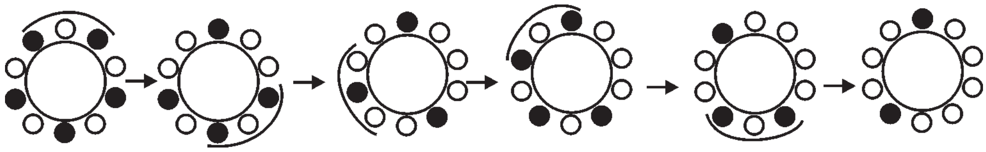
۲۵. اولاً واضح است که تعداد H ها نمی‌تواند برابر ۱۰ باشد، زیرا آخرین تغییر هم شامل H است و هم شامل T.

ثانیاً اگر تصور کنیم که تعداد H ها برابر ۹ باشد، مراحل انجام شده را از انتها به ابتدا مرتب می‌کنیم (H را با ○ و T را با ● نمایش می‌دهیم):



چون در هر مرحله سه‌تایی قابل تعویض منحصربه‌فرد می‌باشد، بنابراین نهایت کار مشخص است و هرگز سکه‌ها به‌صورت یک در میان H و T نخواهند شد.

و اما مراحل تولید ۸ تا H به شکل زیر می‌باشد:



۲۶. برای آن که حاصل b/c∗d مقدار واقعی خود را نشان دهد آن را به یکی از چهار شکل زیر می‌توان پرانتزگذاری کرد:

۱) b/c∗d　　　　۲) (b/c∗d)

۳) (b/c)∗d　　　　۴) ((b/c)∗d)

همچنین اگر آن عبارت را t بنامیم آنگاه حاصل عبارت a - t + e را مستقل از قبلی‌ها به چهار شکل زیر

می‌توان پرانتزگذاری کرد:

۱) $a-t+e$ ۲) $(a-t+e)$

۳) $(a-t)+e$ ۲) $((a-t)+e)$

بنابراین تعداد کل پرانتزگذاری‌ها ۴×۴ یعنی ۱۶ خواهد شد.

۲۷. یکی از سه حالت زیر پیش می‌آید:

۱) هر پنج عضو متوالی باشند که تعداد این مجموعه‌ها برابر ۹۶ به‌دست می‌آید.

۲) دو عضو کوچک آن متوالی و نیز سه عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو دوم آن با عضو سومش متوالی نباشند که در این صورت مجموعه‌ای از ۱ تا ۱۰۰ به شکل زیر افراز خواهد شد:

$$\underbrace{\cdots\cdots}_{x}\times\times\underbrace{\cdots\cdots}_{y}\times\times\times\underbrace{\cdots\cdots}_{z}$$

تعداد افرازهای فوق با تعداد جواب‌های معادله $x+y+z=95$ با شرایط $z\geq ۰$، $y\geq ۱$ و $x\geq ۰$ برابر است که تعداد جواب‌های چنین معادله‌ای برابر $\binom{96}{2}$ یعنی ۴۵۶۰ می‌باشد.

۳) سه عضو کوچک آن متوالی و نیز دو عضو بزرگ آن نیز متوالی باشند ولی عضو سوم آن با عضو چهارمش متوالی نباشد که در این صورت نیز تعداد جواب‌ها برابر $\binom{96}{2}$ یا ۴۵۶۰ به‌دست می‌آید.

۲۸. ابتدا کره‌ها را به سه دسته دوتایی یک دسته یکی‌ای تقسیم کرده و کره‌های موجود در هر دسته دوتایی را به هم می‌چسبانیم که یکی از حالات زیر اتفاق می‌افتد:

۱) هیچ زوجی جرقه نزند. در این حالت معلوم می‌شود که کره تنها، از جنس غالب است.

۲) فقط یک زوج جرقه بزند. معلوم می‌شود که هر دو کره موجود در آن دسته از جنس غالب است.

۳) فقط دو زوج جرقه بزند. از هر یک از این دسته‌ها یک کره بیرون آورده و آن دو را به هم می‌چسبانیم که اگر جرقه زد، آنگاه هر دو از جنس غالب هستند و اگر جرقه نزد کره تنها، از جنس غالب خواهد بود.

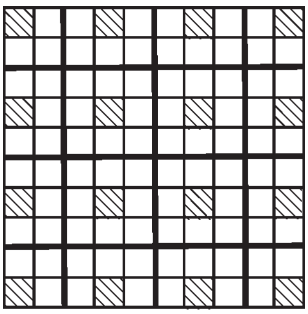
۴) هر سه زوج جرقه بزنند. از هر یک از دسته‌های اول و دوم یک کره بیرون آورده و به هم می‌چسبانیم، اگر جرقه بزند که غالب هستند و اگر جرقه نزند هر دو کره موجود در دسته سوم غالب هستند.

در هر حالت معلوم می‌شود که تعداد اعمال چسباندن بیش از ۴ نمی‌شود.

۲۹. ابتدا توجه می‌کنیم که برای ترکیب سه دنباله با طول‌های a، b و c ابتدا دو تا از آنها مانند a، b را ترکیب کرده (که حاصل دنباله به‌طول a + b و با هزینه a + b می‌شود) و سپس دنباله‌های حاصل را با دنباله سوم ترکیب می‌کنیم که حاصل دنباله‌ای به‌طول a + b + c شده ولی هزینه آن $(a+b)+c$ می‌شود که در کل مجموع هزینه‌ها برابر $۲(a+b)+c$ می‌شود. برای آن که کل هزینه‌ها مینیمم شود کافی است هر یک از دو عدد a و b از عدد c کمتر یا مساوی باشند. بنابراین در هر دسته‌ای که حداقل ۳ دنباله داشته باشد ابتدا دنباله‌های با طول مینیمم را با هم ترکیب می‌کنیم، که به جدول زیر خواهیم رسید.

هزینه	دسته جدید	دسته دنباله‌ها
۹	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰	۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۸, ۱۰
۱۳	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳	۶, ۷, ۸, ۸, ۹, ۱۰
۱۶	۹, ۱۰, ۱۳, ۱۶	۸, ۸, ۹, ۱۰, ۱۳
۱۹	۱۳, ۱۶, ۱۹	۹, ۱۰, ۱۳, ۱۶
۲۹	۱۹, ۲۹	۱۳, ۱۶, ۱۹
۴۸	۴۸	۱۹, ۲۹
۱۳۴		

۳۰. اگر جدول را مطابق شکل، به ۱۶ ناحیه افراز کنیم آنگاه معلوم می‌شود که وجود حداقل یک خانه علامت‌دار در هر ناحیه الزامی است. بنابراین وجود حداقل ۱۶ خانه علامت‌دار حتمی است. در شکل با ۱۶ خانه علامت‌دار به منظور مسأله رسیده‌ایم:



۳۱. $A(n) = B(n+۱) - ۱ \Rightarrow A(n) = [A(n-۱) + ۲] - ۱ = A(n-۱) + ۱$

یعنی به‌ازای $n \geq ۲$ حاصل $A(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $A(۲) = ۲$، بنابراین برابری $A(n) = n$ همیشه برقرار است.

$B(n) = A(n-۲) + ۲ \Rightarrow B(n) = [B(n-۱) - ۱] + ۲ = B(n-۱) + ۱$

یعنی به‌ازای $n \geq ۳$ حاصل $B(n)$ از عدد قبلی خود ۱ واحد بیشتر است و چون $B(۳) = ۳$، بنابراین برابری $B(n) = n$ به‌ازای $n \geq ۳$ همیشه برقرار است.

۳۲. اگر خانه‌های با مختصات (۱ , ۲)، (۱ , ۳)، (۱ , ۴)، (۲ , ۱)، (۳ , ۱)، (۴ , ۱) را به‌ترتیب انتخاب کنید صفحه شطرنجی خواهد شد. لازم به ذکر است که انتخاب هر یک از آن خانه‌ها الزامی است، زیرا خانه‌ای مانند (۱ , ۲) را فقط انتخاب خودش می‌تواند تغییر رنگ دهد.

۳۳. به هر دانش‌آموز یک کد از ۱ تا ۳۰ داده و شماره او را در مبنای ۲ در نظر می‌گیریم. معلوم است که در آن مبنا شماره هر فرد حداکثر پنج رقمی است. بنابراین پنج لیست به نام‌های A، B، C، D و E در نظر گرفته و هریک از آنها را متناظر به یکی از ارقام پنج‌گانه اعداد در مبنای ۲ قرار می‌دهیم. در جایگاه‌هایی که رقم ۱ باشد در لیست متناظر اسم فرد را می‌نویسیم و در غیر این صورت اسم او را در آن لیست نمی‌نویسیم. به‌عنوان مثال اسم نفر یازدهم در لیست‌های A، B و D نوشته شده ولی در لیست‌های C و E نوشته نمی‌شود، زیرا عدد ۱۱ در مبنای ۲ به شکل ۰۱۰۱۱ نوشته می‌شود. لیست‌های پنج‌گانه را به یک نفر نشان می‌دهیم و او اطلاع می‌دهد که فرد المپیادی در کدام‌یک از لیست‌های پنج‌گانه قرار دارد که به این ترتیب شماره آن فرد شناسایی خواهد شد.

۳۴. اگر اعداد را از چپ به راست دوبه‌دو در داخل یک بسته در نظر بگیریم اولاً معلوم می‌شود که مجموع اعداد موجود در داخل هر بسته برابر ۱۰۰۱ می‌شود و ثانیاً بسته اول پنج رقمی، هشت بسته بعدی چهار رقمی، نود بسته بعدی پنج‌رقمی و مابقی بسته‌ها همگی شش رقمی می‌باشند. بنابراین پس از اتمام بسته ۹۹ تعداد ارقام به‌کار رفته به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$? = ۱ \times ۵ + ۸ \times ۴ + ۹۰ \times ۵ = ۴۸۷$$

بنابراین ۴۹۰امین رقم، سومین رقم از بسته صدم می‌باشد. چون بسته صدم به شکل ۱۰۰۹۰۱ می‌باشد، بنابراین رقم مورد نظر رقم صفر می‌باشد.

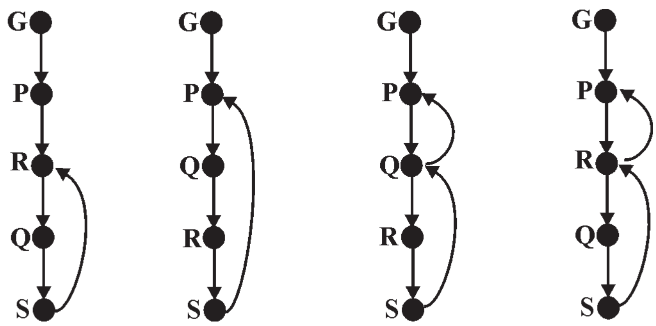
۳۵. رقم اول و آخر را یک بسته، رقم دوم و ماقبل آخر (نهم) را یک بسته، و رقم پنجم و ششم را نیز یک بسته در نظر می‌گیریم. اولاً معلوم می‌شود که تعداد بسته‌ها برابر ۵ می‌باشد و ثانیاً دو رقم موجود در

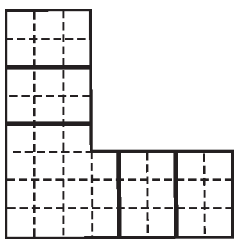
درون هر بسته مستقل از بسته‌های دیگر بر روی هم سه حالت «۰۰»، «۰۱» و «۱۰» را می‌توانند داشته باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر $۳^۵$ می‌باشد.

۳۶. انتخاب جایگاه رخ در هر یک از ستون‌های اول و دوم مستقل از یکدیگر به ۴ طریق، در ستون‌های سوم و چهارم به ۳ طریق، در ستون‌های پنجم و ششم به ۲ طریق و بالاخره در هر یک از دو ستون آخر به ۱ طریق ممکن است، بنابراین جواب مورد نظر $!۴ \times !۴$ یعنی ۵۷۶ می‌باشد.

۳۷. ابتدا باید توجه کرد که اگر X به Y و نیز Y به X سکه دهد آنگاه لازم است X و Y پدر و پسر باشند.

در گزینه «هـ» نفرات Q و S پدر و پسر هستند و نمودار نفرات بدون R مطابق شکل مقابل می‌شود. در آن نمودار جایگاه R جایی است که بتواند به S سکه بدهد که با توجه به نمودار، فقط می‌تواند پسر S باشد (پدر S، Q است و R نمی‌تواند پدر S باشد). اگر R پسر S باشد، آنگاه Q نمی‌تواند به R سکه بدهد در حالی که یکی از قسمت‌های گزینه «هـ» به صورت $R \longrightarrow Q$ می‌باشد. نمودار سایر گزینه‌ها به اشکال زیر می‌تواند باشد:





۳۸. در شکل مقابل هر یک از مستطیل‌های ۳×۲ مستقل از بقیه اشکال به دو طریق و نیز شکل پنجم فقط به یک طریق قابل پر شدن می‌باشند، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر ۲×۲×۲×۲×۱ یعنی ۱۶ می‌باشد.

۳۹. اگر روی سنگ k ام باشیم و حرکت بعدی حرکت mام باشد، با احتساب سنگی که به‌صورت جفت‌پا به روی آن پریده می‌شود مجموعاً m شماره طی می‌شود. بنابراین بعد از حرکت ۱۳۸۱ مجموعاً ۱۳۸۱ + ... + ۳ + ۲ + ۱ + ۱ یعنی ۹۵۴۲۷۲ شماره طی می‌شود و بعد از آن حرکت بر روی شماره ۹۵۴۲۷۲ قرار خواهیم داشت که اگر آن عدد را بر ۷ تقسیم کنیم باقی‌مانده ۴ می‌آورد به این معنا که در آخرین حرکت به‌صورت جفت‌پا به روی سنگ شماره ۴ پریده شده است. لازم به ذکر است که حرکت اول از روی سنگ شماره ۱ بوده است، بنابراین به مجموع اعداد از ۱ تا ۱۳۸۱ عدد ۱ اضافه شده است.

۴۰. چند حرکت ابتدایی مشخص است. شماره سنگ‌هایی که پس از حرکات اول، دوم، سوم و چهارم بر روی آنها به‌صورت جفت‌پا پریده می‌شود به‌ترتیب ۲، ۴، ۷ و ۱۱ (همان ۱) می‌باشد که از سنگ ۱ به‌ترتیب ۱ واحد، (۲ + ۱) واحد، (۳ + ۲ + ۱) واحد و بالاخره (۴ + ۳ + ۲ + ۱) واحد فاصله دارند. در این لحظه جهت عوض می‌شود و بعد از حرکت n ام دوباره به‌صورت جفت‌پا به روی شماره ۱ پریده خواهد شد که در آن n اولین عدد است که n + ... + ۷ + ۶ + ۵ مضرب ۱۰ باشد و این نیز موقعی برقرار است که n + ... + ۳ + ۲ + ۱ یا $\frac{n(n+۱)}{۲}$ مضرب ۱۰ و یا $n(n+۱)$ مضرب ۲۰ باشد که اولین n بعد از ۴ برای برآورده کردن آن شرط، ۱۵ = n می‌باشد. و بعد از ۱۵ نیز اعداد ۱۹ و ۲۰ آن شرط را برآورده می‌کنند. از حرکت بیستم تا حرکت سی و نهم کاملاً شبیه حرکت صفرم تا نوزدهم می‌باشد؛ یعنی سلسله حرکات دوره تناوبی به‌طول ۲۰ دارد، لذا حرکت ۲۰۰۳ در مکانی قرار داریم که در انتهای حرکت سوم داشته‌ایم، بنابراین بعد از آن حرکت بر روی سنگ هفتم به‌صورت جفت‌پا پریده خواهد شد.