مرحله‌ی دوم شانزدهمین المپیاد کامپیوتر کشور (کلاس اول)

مسئله‌ی ۱: دنباله‌ی آینه‌ای .... ۱۰ امتیاز

دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ را به این صورت می‌سازیم:

$$\begin{aligned} F_0 &= i \\ F_1 &= j \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2} \end{aligned}$$

روشن است که $\mathcal{F}(0,1)$ همان دنباله‌ی فیبوناچی است. اگر این رابطه را برای مقادیر منفی n هم باز کنیم اعداد زیر به‌دست می‌آیند:

$$\ldots, 13, -8, 5, -3, 2, -1, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

اگر علامت‌های منفی را در نظر نگیریم دنباله «آینه‌ای» می‌شود، یعنی اعداد نسبت به عدد F_0 قرینه هستند. در این صورت می‌گوییم $\mathcal{F}(0,1)$ آینه‌ای است.

به‌ازای کدام مقادیر دیگر i و j دنباله‌ی $\mathcal{F}(i,j)$ آینه‌ای خواهد بود؟ اثبات کنید.

مسئله‌ی ۲: جوش‌کاری .... ۲۰ امتیاز

می‌خواهیم n قطعه آهن f_1، f_2، تا f_n به‌ترتیب با طول‌های ℓ_1، ℓ_2، تا ℓ_n را به‌همین ترتیب (از چپ به راست) به هم جوش دهیم تا یک قطعه آهن بزرگ از آن‌ها ایجاد شود. برای این‌کار این قطعات را به‌همین ترتیب پشت سرهم در یک ردیف می‌چینیم و هر بار دو تا از قطعه‌های کنار هم را برداشته، به هم جوش می‌دهیم و در جای قبلی‌شان قرار می‌دهیم (با این کار یک عدد از تعداد قطعه آهن‌ها کم می‌شود). این کار را اگر $n-1$ بار تکرار کنیم، کار به پایان رسیده است.

اما می‌دانیم که هزینه‌ی جوش‌دادن دو قطعه آهن کنار هم به طول‌های a و b برابر $a+b$ است. می‌خواهیم قطعه‌آهن‌ها را به‌ترتیبی به هم جوش دهیم تا مجموع کل هزینه‌ی این کار کمینه شود.

برای این کار یک زیرمسئله‌ی P_{ij} تعریف می‌کنیم که آن جوش دادن f_i، f_{i+1}، تا f_j $(i<j)$ به هم با همین ترتیب است. هزینه‌ی کمینه‌ی این کار را C_{ij} می‌نامیم.

الف. یک فرمول بازگشتی برای C_{ij} و برحسب C_{rk} بنویسید به‌طوری که $r<k$ و $k-r<j-i$. بدیهی است که $C_{ii}=0$.

ب. نشان دهید که C_{1n} برای مسئله‌ی اصلی چه‌گونه محاسبه می‌شود.

ج. برای $n=5$ و ورودی $\ell_1=6$، $\ell_2=2$، $\ell_3=4$، $\ell_4=3$ و $\ell_5=5$، بند «ب» را دنبال کنید و مقدار هزینه‌ی کل و ترتیب جوش دادن را به‌دست آورید.

مسئله‌ی ۳: ناریا .... ۲۰ امتیاز

کشوری با n شهر را «صرفه‌جو» گوییم اگر دقیقاً $n-1$ جاده بین شهرهای آن به‌گونه‌ای کشیده شده باشد که بتوان با شروع از هر یک از شهرهای آن با استفاده از جاده‌ها به هر شهر دیگری از آن رسید. توجه کنید که هر جاده بین دو شهر کشیده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر هر یک از جاده‌های یک کشور صرفه‌جو از بین برود، کشور به دو زیر کشور صرفه‌جو، تقسیم می‌شود. مثلاً اگر یک کشور صرفه‌جو با ۲ شهر داشته باشیم و تنها جاده‌ی موجود در آن را حذف کنیم دو کشور صرفه‌جو که هر کدام ۱ شهر دارند به دست می‌آید. کشور ناریا یک کشور صرفه‌جو با n شهر است. در ضمن می‌دانیم که به هر کدام از شهرهای این کشور حداکثر ۳ جاده متصل شده است. ثابت کنید در این کشور جاده‌ای وجود دارد که با حذف آن ۲ کشوری که به‌دست می‌آیند هرکدام حداقل $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ و حداکثر $\lceil \frac{2n}{3} \rceil$ شهر داشته باشند. ($\lceil r \rceil$ کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی r و $\lfloor r \rfloor$ بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی r است.)

مسئله‌ی ۴: جای‌گشت نقره‌ای .... ۲۵ امتیاز

یک جای‌گشت، ترتیبی از اعداد ۱ تا n است که هر عدد دقیقاً یک‌بار در آن ظاهر شده‌است. مثلاً «۴ ۱ ۵ ۲ ۳» یک جای‌گشت از اعداد ۱ تا ۵ را نشان می‌دهد. فرض کنید عدد π_n آخرین عدد جای‌گشت π باشد. هر عمل وارون تعداد π_n عنصر آخر π را در دنباله معکوس می‌کند (به ترتیب عکس قرار می‌دهد) تا جای‌گشت $rev(\pi)$ به‌دست آید. مثلاً اگر عمل وارون را روی جای‌گشت بالا اعمال کنیم «۲ ۵ ۱ ۴ ۳» به‌دست می‌آید. گوییم π یک جای‌گشت نقره‌ای است اگر $rev(\pi) = \pi$ باشد. ثابت کنید با انجام متناهی بار عمل وارون روی هر جای‌گشت π سرانجام یک جای‌گشت نقره‌ای به‌دست می‌آید.

مسئله‌ی ۵: کیسه‌ها .... ۲۵ امتیاز

$2n$ مهره داریم که روی هر یک عددی نوشته شده است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n روی دقیقاً دو مهره نوشته شده است. مهره‌ها در n جعبه طوری گذاشته شده‌اند که در هر جعبه دو مهره (با اعداد نه لزوماً یک‌سان) قرار دارند و مهره‌های درون جعبه‌ها دیده می‌شوند. یک مهره از یکی از جعبه‌ها اخیراً گم شده است.

می‌خواهیم از هر جعبه تنها یک مهره برداریم به‌طوری‌که از همه‌ی اعداد ۱ تا n مهره‌ای برداشته باشیم.

آیا این کار همواره ممکن است؟ در صورت مثبت بودن پاسخ، این موضوع را اثبات کرده و در صورت منفی بودن، یک مثال نقض بزنید.

موفق باشید!