به نام خدا

پاسخ تشریحی

مرحله اول هجدهمین دوره المپیاد کامپیوتر

سال ۱۳۸۶

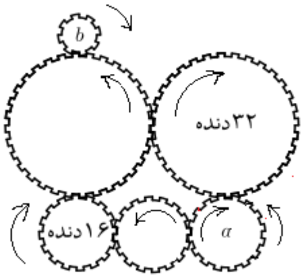
❖ این پاسخ‌ها با تلاش همیاران و اعضای کمیته‌ی ملی المپیاد کامپیوتر فراهم شده‌اند و دور از انتظار نیست که کمبودها و خطاهایی در آن وجود داشته باشد. هرگونه پیشنهاد اصلاح یا تکمیل این پاسخ‌ها را از طریق سامانه‌ی اینترنتی http://www.inoi.ir به اطلاع کمیته‌ی ملی المپیاد کامپیوتر برسانید.

۱) گزینه‌ی (ب) درست است.

برای محاسبه‌ی حاصل جمع خواسته شده تعداد دفعاتی که هر عدد در جمع بکار رفته را محاسبه می‌کنیم. این تعداد برابر است با تعداد زیرمستطیل‌هایی که آن عدد را شامل می‌شود.

به علت تقارن موجود، تعداد زیرمستطیل‌هایی که ۵ را شامل می‌شوند با تعداد زیرمستطیل‌های دارای ۵- برابرند. پس این دو خانه روی هم تاثیری در حاصل‌جمع نهایی ندارند. برای ۲ و ۲- هم همین شرایط برقرار است. تعداد زیرمستطیل‌های شامل خانه‌ی ۱ برابر است با: $2 \times 4 = 8$ (۲ انتخاب برای ضلع پایین مستطیل و ۴ انتخاب برای ضلع راست آن وجود دارد.)

پس حاصل جمع مورد نظر برابر ۸ است.



۲) گزینه‌ی (ه) درست است.

اگر چرخ‌دنده‌ای را به اندازه‌ی X دنده در جهتی (ساعتگرد یا پادساعتگرد) بچرخانیم، چرخ‌دنده‌ی مجاور آن به اندازه X دنده در خلاف آن جهت می‌چرخد.

مطابق شکل، چرخ دنده a هم باید x دنده ساعتگرد بچرخد هم x دنده پادساعتگرد. پس هرگز نمی‌چرخد.

۳) گزینه‌ی (د) درست است.

از شهر ۴ به ۵ تنها یک مسیر وجود دارد که همان جاده‌ی یک طرفه از ۴ به ۵ است. برای هر شهر $1 \leq i \leq 3$ باید بین i و دقیقن یکی از شهرها با شماره‌ی بزرگتر جاده رسم کرد. یعنی به 5-i طریق می توان جاده رسم کرد که دقیقن یک مسیر از i به ۵ وجود داشته باشد. پس تعداد کل حالت‌ها $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ است.

۴) گزینه‌ی (ج) درست است.

با توجه به شرط ۱، از هر شهر دقیقن یک جاده‌ی یک طرفه خارج می شود. پس مجموع جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۱ دقیقن ۱ است. مجموع جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۲ حداکثر ۲، شهر ۳ حداکثر ۳ و شهر ۴ حداکثر ۴ است.

پس تنها در صورتی مجموع تعداد جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۴ بیشتر از ۳ می‌شود که از شهرهای ۱ و ۲ و ۳ جاده‌هایی به سمت ۴ وجود داشته باشد و از ۴ یک جاده به ۵ و تنها در حالتی مجموع جاده‌های ورودی و خروجی شهر ۵ بیشتر از ۳ می‌شود که هر ۴ شهر با یک جاده‌ی یک طرفه مستقیمن به آن متصل باشند.

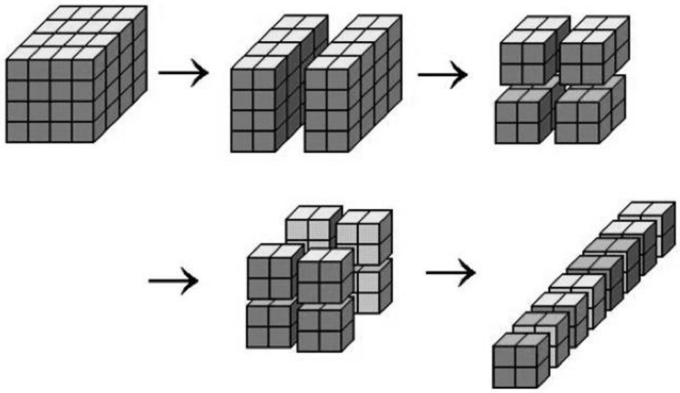
پس این ۲ حالت را از ۲۴ حالت جواب مساله‌ی قبل کم می‌کنیم و جواب ۲۲ می‌شود.

۵) گزینه‌ی (ج) درست است.

اگر هیچ‌کدام از ۴ حرکت اول را انتخاب نکنیم (۴ جهت اصلی) روبات همیشه روی مبدا مختصات باقی می‌ماند و اگر فقط یکی از آن‌ها را انتخاب کنیم همیشه روی محورها حرکت خواهد کرد. کم‌ترین قیمت خریدن ۲تا از ۴ جهت اصلی، ۴۰۰۰۰ تومان یعنی حرکت به چپ و پایین است.

با این ۲ حرکت روبات فقط می‌تواند ناحیه‌ی سوم را طی کند. از بین تقارن‌ها کمترین قیمت برابر ۱۰۰۰۰ تومان است که مربوط به تقارن نسبت به $y = -x$ است.

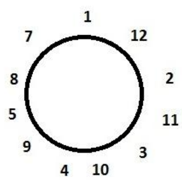
حالا با حرکت به چپ و پایین به هر مختصاتی که برسد به قرینه‌ی آن نسبت به $y = -x$ نیز می‌رسد و می‌تواند از آنجا خود را دوباره به مبدا مختصات برساند. به این ترتیب همه‌ی مختصات را می‌تواند طی کند. چون همه‌ی انتخاب حرکت‌ها کمینه بود کمترین قیمت روبات ۵۰۰۰۰ تومان می‌شود.



۶) گزینه‌ی (ب) درست است.

در این شکل مکعبی 1×1 وجود دارد که هیچ کدام از ۶ وجه آن دیده نمی‌شود. یعنی از هر ۶ وجه، به مکعب 1×1 دیگری اتصال دارد. برای جدا کردن چنین مکعبی به ۶ عمل برش نیاز است. پس دست کم ۶ برش لازم داریم. به ترتیب مقابل با ۶ برش به خواسته‌ی مساله می‌رسیم:

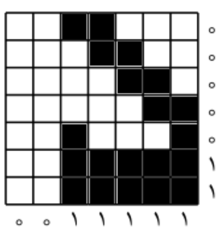
مشخص است که با دو برش نهایی می‌توان کار را تمام کرد.



۷) گزینه‌ی (ب) درست است.

به ازای هر عدد مانند a حداکثر ۲ نفر a تا شیرینی برمی‌دارند (خود شخص با شماره a و شخص سمت چپش). پس دست کم ۶ شماره وجود دارد که به تعداد آن ها شیرینی برداشته می‌شود.

در حالت نشستن مشخص‌شده، به ازای اعداد ۷ تا ۱۲ هر بار ۲ بار شیرینی برداشته می‌شود که با توجه به شرایط بالا حداکثر تعداد است: $2\times(7+8+\cdots+12)=14$



۸) گزینه‌ی (ج) درست است.

در ۵ ستونی که به آنها ۱ نسبت داده شده، در هر ستون دست‌کم ۴ تا ۱ و در مجموع حداقل ۲۰ تا ۱ باید وجود داشته باشد. از طرفی برای ۵ سطری که به آن‌ها 0 نسبت داده شده باید در مجموع دست‌کم ۲۰ تا 0 وجود داشته باشد یعنی حداکثر ۲۹ = ۲۰ − ۴۹ تا ۱ در جدول داریم.

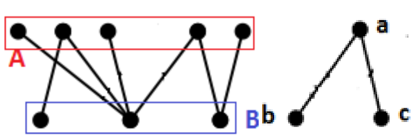
(با چرخاندن جدول و تبدیل ۱ها به ۰ و برعکس به حالت حداکثر می‌رسیم)

۹) گزینه‌ی (ج) درست است.

تعداد تغییرات رقم یکان، دهگان و صدگان را بررسی کرده و سپس مجموع آنها را محاسبه می‌کنیم:

- یکان: $926-233=693$
- دهگان: $92-23=69$
- صدگان: $9-2=7$

در نتیجه مجموع تغییرات برابر است با: $693+69+7=769$



۱۰) گزینه‌ی (ج) درست است.

شکل سوال به صورت روبرو قابل ترسیم است:

هیچ‌کدام از نقطه‌های بخش A نمی‌توانند با هیچ‌یک از نقطه‌های بخش B همرنگ باشند. (چرا؟)

دو نقطه‌ی b و c را در بخش A و نقطه‌ی a را در بخش B می‌گذاریم. پس حداکثر اختلاف تعداد بخش(رنگ)ها $7-4=3$ می‌شود.

۱۱) گزینه‌ی (ه) درست است.

چون نفر دهم کلاس ۱۵ گرفته دست‌کم ۱۰ نفر نمره‌ی بالای ۱۰ دارند. نشان می‌دهیم ۲۰ نفر دیگر، همه می‌توانند نمره‌ی زیر ۱۰ گرفته باشند.

مجموع نمرات دانش‌آموزان $12\times30=360$ است و دست‌کم یک نفر نمره‌ی ۲۰، یک نفر ۵ و یک نفر ۱۵ گرفته‌است: $15+5+20=40$

فرض می‌کنیم ۱۹ نفر نمره‌ی ۹ گرفته باشند: $19\times9=171$

پس باید ۸ نفر دیگر با نمره‌ی بالای ۱۵ داشته‌باشیم که در مجموع *149=(40+171)-360* نمره آورده باشند. حالتی که در آن ۵ نفر ۱۹ و ۳ نفر ۱۸ گرفته باشند این شرط را نیز تامین می‌کند.

۱۲) گزینه‌ی (الف) درست است.

دایره‌ها به گونه‌ای تقسیم شده‌اند که یکی از کمان‌های کامل آنها مسیری با ۴ پاره خط دارد و کمان دیگر ۳ تا. از هر دایره مسیر ۳خطی را انتخاب می‌کنیم. پس در کل ۱۱ جاده را می‌پیماییم. از ۷ تا از نقاط تقاطع دایره‌ها ۲ جاده برای انتخاب وجود دارد و از ۴تای آنها ۳ جاده. پس طبق اصل ضرب تعداد روش‌های رسیدن از A به B با کمترین تعداد جاده $3^4 \times 2^7$ می‌شود.

۱۳) گزینه‌ی (ج) درست است.

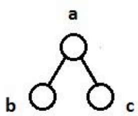
اگر با فشردن یک کلید عدد نمایشگر زیاد شد، یعنی لامپ آن خاموش بوده و حالا روشن است و نیازی به فشردن دوباره‌ی آن کلید نیست و اگر عدد کم شد باید یک بار دیگر آن را فشار دهیم. بنابراین اگر x چراغ خاموش داشته باشیم، به ازای هرکدام یک بار باید کلیدی را فشار دهیم. همچنین $2(\mathrm{n}-\mathrm{x})$ بار باید کلید لامپ‌های را فشار دهیم. تعداد کل حرکات $2(\mathrm{n}-\mathrm{x})+\mathrm{x}=2\mathrm{n}-\mathrm{x}$ بار است.

اگر $\mathrm{x}=0$ باشد همه‌ی لامپ‌ها روشن هستند و نیازی به هیچ تغییر وضعیتی نیست. پس حداکثر تعداد مرحله‌ها، به ازای $\mathrm{x}=1$ بدست می‌آید و $2\mathrm{n}-1$ است.

۱۴) گزینه‌ی (ج) درست است.

به دایره‌هایی که هیچ دایره‌ای زیر آن‌ها نیست "میوه" می‌گوییم.

با تعیین وضعیت میوه‌ها، رنگ بقیه‌ی دایره‌ها منحصر به فرد تعیین می‌شود. (چرا؟)



شکل مقابل را در نظر بگیرید. برای b و c، ۳ رنگ وجود دارد. در صورتی که رنگ آن‌ها یکی شود، a هم باید با آن‌ها همرنگ باشد و در غیر اینصورت باید به رنگ سوم درآید.

در شکل ۶ میوه داریم پس طبق اصل ضرب به 3^6 حالت می‌توان شکل را رنگ کرد.

۱۵) گزینه‌ی (ه) درست است.

2143 → دوران → *3214* → ۵۴۰ بار "به علاوه ۲" → *2134*

111 → دوران → *10011* → ۴۴۵۰ بار "به علاوه ۲" → *1111*

21212 → ۴۵۵۰ بار "به علاوه ۲" → *12112* → دوران → *21211* → دوران → *12121*

45 → ۷ بار"به علاوه ۲" → *31* → دوران → *103*

۱۶) گزینه‌ی (الف) درست است.

برای k جعبه، با استقرا روی k ثابت می‌کنیم با 2^{k-1} روش می‌توان آن ها را روی زمین قرار داد.

پایه‌ی استقرا برای ۱ جعبه برقرار است.

فرض کنیم حکم برای k جعبه صحیح باشد. برای *k+1* جعبه، حالت‌های مختلف با k جعبه را می‌سازیم. برای هرکدام از این حالت‌ها، جعبه‌ی *k+1*ام را می‌توان سمت راست همه، روی زمین گذاشت و یک ستون جدید ساخت یا روی سمت راست‌ترین ستون آن قرار داد. بدین ترتیب حالت تکراری نخواهیم داشت و تمامی حالات قابل ساخت هستند. (چرا؟)

پس به ازای هر روش چیدن k جعبه، ۲ روش برای چیدن *k+1* جعبه به دست آوردیم. و تعداد روش‌ها 2^k= $2 \times 2^{k-1}$ است. در نتیجه جواب مساله برای *k=8*، ۱۲۸ می‌شود.

۱۷) گزینه‌ی (الف) درست است.

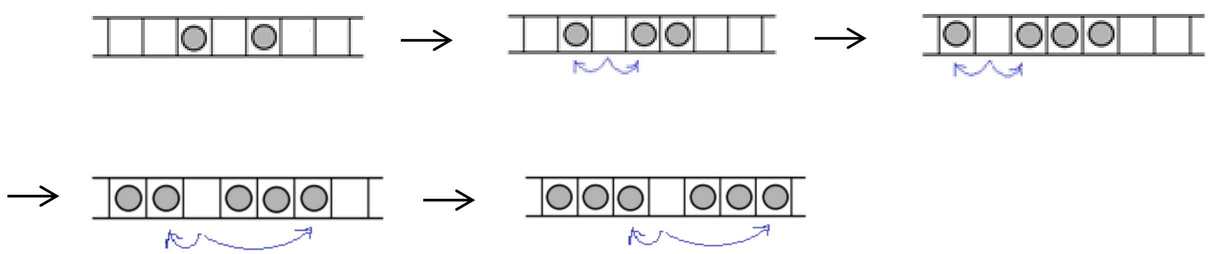
در این صورت میانگین رتبه‌ی همه‌ی دانش آموزان از ۹ بیشتر می‌شود و سروش اول می‌شود:

ریاضی	۱	۲	۳	....	۸	۳۰	۲۹	......	۲۲	.....	۱۰
فیزیک	۳۰	۲۹	۲۸	....	۲۳	۱	۲	......	۲۲	.....	۱۰

مجموع رتبه‌های سروش ۱۸ است. پس کسانی که رتبه‌ی آن‌ها از او بهتر می‌شود باید مجموع رتبه‌هایشان حداکثر ۱۷ باشد. یعنی همه‌ی آن‌ها باید از بین کسانی باشند که در ریاضی و فیزیک رتبه‌ی کمتر یا مساوی ۱۶ آورده باشند. یکی از این افراد هم سروش است. یعنی از بین آن‌ها ۱۵ نفر هستند که می‌توانند رتبه‌ی بهتر از سروش بیاورند. پس رتبه‌ی سروش حداکثر ۱۶ است.

۱۸) گزینه‌ی (ب) درست است.

شکل ۱ و ۴:



اگر در هر مرحله مجموعه‌ی خانه‌های دارای مهره را در نظر بگیریم بازه‌ای را تشکیل می‌دهند که یک خانه‌ی خالی در بین آنها است. با استقرا این ادعا را اثبات می‌کنیم:

پایه‌ی استقرا: پس از حرکت اول دو خانه داریم که از یکدیگر یک خانه فاصله دارند.

گام استقرا: هر خانه‌ای که در این مرحله انتخاب شود ابتدا دو خانه را اضافه می‌کند که با این کار بازه‌ای با طول بزرگتر تشکیل می‌شود که خانه‌ی خالی ندارد (در یکی از جهت‌ها خانه‌ی خالی پر می‌شود). سپس مهره‌ی خانه‌ی انتخاب شده حذف می‌گردد که چون این خانه در دو سر بازه‌ی جدید نیست همواره بازه‌ای با یک خانه‌ی خالی باقی می‌ماند.

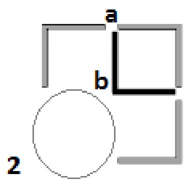
با این نتیجه می‌توان دریافت که هیچ‌گاه به شکل‌های ۲ و ۳ نمی‌توان رسید.

۱۹) گزینه‌ی (ج) درست است.

برای اینکه یک زیرمستطیل شامل خانه‌ی $(7,5)$ باشد هر ضلع آن در بازه‌ی مورد پذیرش خود انتخاب شود

در نتیجه برای ضلع سمت راست زیرمستطیل ۷ حالت، ضلع چپ ۶ حالت، ضلع بالا ۸ حالت و ضلع پایین ۳ حالت داریم. پس طبق اصل ضرب $7 \times 6 \times 8 \times 3 = 1008$ زیرمستطیل شامل خانه‌ی $(7,5)$ وجود دارد.

۲۰) گزینه‌ی (الف) درست است.



ضلع ab به چهار حالت مختلف می‌تواند توسط شکلی که در مساله بیان شده پر شود. شکل زیر یکی از این حالات را نمایش می‌دهد که خط‌های طوسی نشان دهنده‌ی حالت‌هایی است که منحصر به فرد تعیین می‌شود و دایره‌ها نیز می‌توانند به ۲ حالت مختلف پر شوند.

۳ حالت دیگر نیز به همین ترتیب هرکدام به ۲ طریق می‌توانند جدول را پر کنند. در نتیجه تعداد حالات کل برابر است با: $2 \times 4 = 8$

۲۱) گزینه‌ی (ب) درست است.

با استقرا روی n ثابت می‌کنیم که به 2^{n-1} حالت می‌توان n لامپ را روشن کرد. لامپ‌ها را از چپ به راست از 1 تا n شماره‌گذاری می‌کنیم.

پایه ی استقرا: برای $\mathrm{n} = 1$ برقرار است: تنها لامپ را روشن می‌کنیم.

گام استقرا: فرض کنیم برای $\mathrm{n} - 1$ لامپ، 2^{n-1} طریق وجود داشته باشد. برای n لامپ، لامپ شماره‌ی n را در نظر نمی‌گیریم. به ازای هر روش در n-1، ۲ حالت متناظر در n ارائه می‌دهیم. در هر روش، هرگاه لامپ n-1ام روشن شد،۲ انتخاب داریم: یا اول لامپ n را روشن می‌کنیم بعد دنباله حرکت‌های n-1 لامپ را ادامه می‌دهیم یا دنباله را ادامه داده و درنهایت به‌عنوان آخرین لامپ، لامپ nام را روشن می‌کنیم.

درصورتی‌که هیچ لامپی با شماره‌ی کمتر از n-1 خاموش نباشد، تنها یک انتخاب داریم (روشن کردن لامپ nام) که متناظر با این دنباله حرکت است: $(1,2,3,\ldots\ldots,\mathrm{n}-1,\mathrm{n})$. این دنباله را هم متناظر با دنباله‌ی جدید $(\mathrm{n},\mathrm{n}-1,\mathrm{n}-1,\ldots\ldots,2,1)$ در نظر می‌گیریم.

پس به ازای هر دنباله برای n-1 لامپ، ۲ دنباله برای n لامپ معرفی کردیم. بنابراین با 2^{n-1} روش می‌توانیم n لامپ را روشن کنیم و جواب مساله ۵۱۲ می‌شود.

۲۲) گزینه‌ی (ج) درست است.

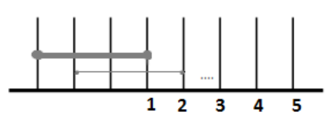
تعداد روش‌های جفت‌کردن خانه‌های یک سطر و ساختن جفت ستون $\binom{4}{2} = 6$ است. اگر جفت ستون‌های دو سطر برابر باشند، یک چهارخونه تولید می‌شود. هر سطر حداقل یک خانه‌ی مشکی دارد (۱۰ خانه). هر خانه‌ی مشکی که به یک سطر اضافه کنیم، حداقل یک جفت ستون می‌سازد. پس حداکثر می‌توانیم ۶ خانه‌ی مشکی دیگر به جدول اضافه کنیم تا هیچ جفت تکراری و در نتیجه هیچ چهارخونه‌ای ساخته نشود (اگر در سطری ۳ خانه سیاه شود، ۳ جفت ستون ساخته می‌شود و تعداد خانه‌های سیاه را کم می‌کند). یعنی حداکثر ۱۶ خانه‌ی جدول سیاه می‌شود.

۲۳) گزینه‌ی (ب) درست است.

تعداد همه‌ی جفت‌بندی‌ها برابر است با: $\frac{\binom{8}{2}\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{4!}=105$

تعداد دفعاتی که هر طولِ مجاز برای خط‌چین‌ها، در کل جفت‌بندی‌ها تکرار شده‌اند را محاسبه می‌کنیم.

به ازای مشخص شدن طولِ یک پاره خطِ جفت‌کننده، $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=15$ حالت برای کامل کردن جفت‌بندی وجود دارد.



می‌توان خط‌چین به طول ۱ را به ۷ حالت، به طول ۲ را به ۶ حالت و ... به طول ۷ را به ۱ حالت رسم کرد (شکل روبرو)

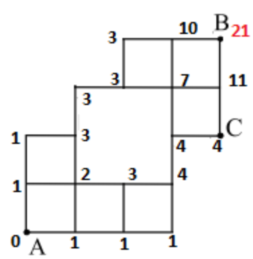
پس مجموع طول جفت‌بندی‌ها ۱۲۶۰ می‌شود که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

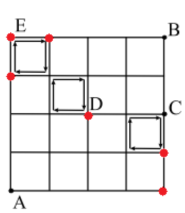
$$(7\times1+6\times2+5\times3+4\times4+3\times5+2\times6+1\times7)\ \times\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!}=84\times15$$

و میانگین آن برابر است با: $\frac{1260}{105}=12$

۲۴) گزینه‌ی (ب) درست است.

دزد فقط مجاز به حرکت به سمت راست و بالا است. هرکدام از راس‌های مسیرِ پلیس‌ها که با تعداد دقایق حرکت دزد تا آن راس به پیمانه‌ی ۴ همنهشت باشند، از جدول حذف می‌کنیم. به این ترتیب به جدول روبه‌رو می‌رسیم و تعداد روش‌های رسیدن به نقطه B در این شکل را با اصل جمع محاسبه می‌کنیم.





۲۵) گزینه‌ی (الف) درست است.

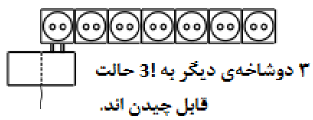
برای هرکدام از اجناس فروشگاه ۳ حالت درنظر می‌گیریم: در مجموعه‌ی A یا در مجموعه‌ی B یا خارج از قاعده‌ی پیش‌بینی.

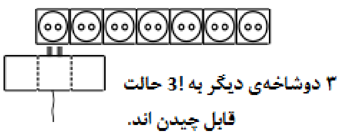
هیچ‌کدام از دو مجموعه‌ی A و B هم نباید خالی باشند. پس طبق اصل شمول و عدم شمول داریم: $3^8 - 2^8 - 2^8 + 1 = 6050$

۲۶) گزینه‌ی (د) درست است.

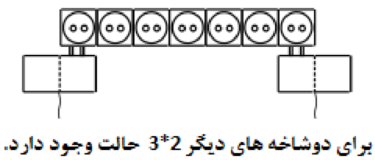
ابعاد مجموعه‌ی پریزها 1×7 و ابعاد دوشاخه‌ها 1×8 است. پس باید بخشی از یک دوشاخه بیرون بماند. حالت‌های زیر پیش می‌آید:

- فقط یک قسمت از یک دوشاخه بیرون بماند:





- از دو طرف پریزها ۲ قسمت از ۲ دوشاخه بیرون بزنند:



با در نظر گرفتن حالت‌های متقارن (در مجموع ۷ حالت) جواب مساله $6 \times 7 = 42$ می‌شود.

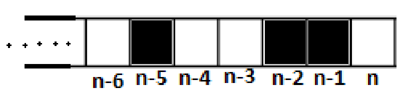
۲۷) گزینه‌ی (د) درست است.

- ارتفاع نورافکن وسط ۱۰ باشد: در اینصورت، این نورافکن همه‌ی جعبه‌ها را پوشش می‌دهد و ۲ نورافکن دیگر به $10\times10=100$ روش می‌توانند قرار گیرند.
- ارتفاع آن کمتر از ۱۰ باشد: جعبه‌های اول و آخر (۱ و ۲۰) در تاریکی می‌مانند پس ۲ نورافکن کناری باید ارتفاع حداقل ۵ داشته باشند که در اینصورت تمام جعبه‌ها روشن می‌شوند. پس برای هر ارتفاع نورافکن وسط بین ۱ تا ۹، نورافکن های کناری $6\times6=36$ حالت دارند.

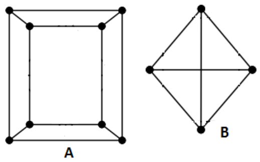
پس در مجموع $100+9\times36=424$ روش وجود دارد.

۲۸) گزینه‌ی (ه) درست است.

ادعا می کنیم برای هر n، نفر اول برنده‌ی بازی است.



۶ خانه‌ی پایانی (سمت راست) نوار را (در صورت وجود) در نظر می‌گیریم. در صورتی‌که مهره در هرکدام از خانه‌های سیاه قرار گرفت، نفر اول حرکت می کند و مهره را به خانه‌ی nام می‌برد. در غیر اینصورت نوبت را به نفر دوم واگذار می‌کند. چون نمی‌توانیم دوبار عمل واگذاری داشته باشیم نفر دوم مجبور به حرکت است و بالاخره مهره را در یکی از خانه‌های سیاه قرار می‌دهد و نفر اول برنده می‌شود.



۲۹) گزینه‌ی (د) درست است.

شکل سوال را به صورت روبه‌رو رسم می‌کنیم:

در شکل B شرایط لازم برای اجرای "عمل" وجود ندارد. پس هر ۶ تکه خط آن باقی می‌ماند.

تعداد تکه خط‌های متصل به هر نقطه را درجه‌ی آن نقطه می‌نامیم. این "عمل"، زوجیت درجه‌ی نقطه‌ها را تغییر نمی‌دهد. درجه‌ی همه‌ی ۸ نقطه در شکل A فرد(۳) است. پس در پایان هم درجه‌ی آن‌ها فرد یعنی دست کم ۱ خواهد بود. بنابراین از این شکل هم دست‌کم ۴ خط باقی خواهد ماند.

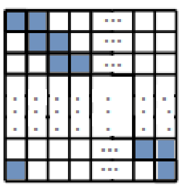
۳۰) گزینه‌ی (د) درست است.

در هر مقایسه بین ۲ عدد، عدد بزرگتر قطعن کوچک‌ترین عدد نیست. پس می‌توان در هر بار مقایسه یکی از اعداد را حذف کرد.

در هر مرحله اعداد را دو به دو با هم مقایسه می‌کنیم و نصف اعداد حذف می‌شوند. پس در $\lceil \log_2 1386 \rceil = 11$ مرحله به کوچکترین عدد می‌رسیم. با این روش، ۱۳۸۵ مقایسه انجام داده‌ایم (با استقرا ثابت کنید برای پیدا کردن کوچکترین عدد در بین n عدد n-1 مقایسه لازم و کافی است).

در اینصورت دومین کوچک‌ترین عدد، در مقایسه با کوچک‌ترین عدد حذف شده است. کوچک‌ترین عدد، با ۱۱ عدد در ۱۱ مرحله مقایسه شده است. کوچک‌ترین عدد از بین این ۱۱ عدد را با ۱۰ مقایسه پیدا می‌کنیم. در هر روش از مقایسه‌ها حداقل ۱۱ وزنه با کوچکترین وزنه مقایسه می‌شوند. (چرا؟)

پس در مجموع با *1385+10=1395* مقایسه به دو عدد کوچک‌تر می‌رسیم. این عدد در گزینه‌ها وجود ندارد ولی نزدیک‌ترین گزینه به آن (د) یعنی ۱۳۹۶ است.



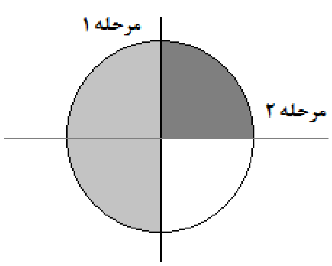
۳۱) گزینه‌ی (ه) درست است.

$2n$ تا از بزرگترین اعدادی که قرار است در جدول قرار داده شود را در خانه‌های علامت‌دار جدول روبرو می‌گذاریم.

از طرفی چون از هر سطر باید ۲ خانه شامل بزرگترین اعداد را علامت بزنیم، حتمن دست‌کم $2n$ خانه علامت زده می‌شود. پس $2n$ خانه لازم و کافی است.

۳۲) گزینه‌ی (الف) درست است.

با استفاده از الگوریتم جست‌وجوی دودویی پیش می‌رویم. ابتدا مکان ۱ تا ۵۰ را مورد سوال قرار می‌دهیم. در صورتی‌که عدد ۱ در بین این ۵۰ مکان بود، کار را با این نیمه ادامه می‌دهیم و در غیر اینصورت سراغ نیمه‌ی دیگر می‌رویم.



با این کار از نامطلوب بودن نیمی از مکان‌های دور دایره مطمئن می‌شویم. در ادامه هر سوالی که بپرسیم آن خانه‌ها تاثیری در جواب دستگاه ندارند. پس می‌توان از وجودشان صرف نظر کرد (نیمه‌ی سیاه).

در هر مرحله نیمی از خانه‌های سفید (و به تعداد مورد نیاز خانه‌ی سیاه) را می‌پرسیم و با اطمینان نیمی از سفیدها را کنار می‌گذاریم. با طی ۷ مرحله‌ی زیر به عدد ۱ می‌رسیم: (هر عدد، تعداد خانه‌های باقی مانده که یکی از آن‌ها مکان عدد ۱ است را نشان می‌دهد.)

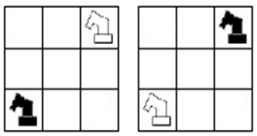
$$50 \rightarrow 25 \rightarrow 13 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

۳۳) پاسخ در گزینه‌ها نیست.

وضعیت قرار گیری دو نهنگ نسبت به هم را به ۲ حالت زیر تقسیم می‌کنیم:

- هم‌سطر یا هم‌ستون باشند: در این صورت برای نهنگ سیاه ۶۴ حالت و برای نهنگ سفید ۱۴ انتخاب داریم: $64\times 14 = 896$

- در ۲ سر قطر یک مستطیل قرار گرفته باشند: تعداد زیرمستطیل‌های جدول 8×8 برابر است با $\binom{8}{2} \times \binom{8}{2}$ (انتخاب ۲ خط افقی برای ضلع بالا و پایین مستطیل و ۲ خط عمودی برای ضلع چپ و راست آن)



برای هر مستطیل، مهره‌ها فقط می‌توانند در ۲ سر قطر غیر اصلی آن (به شکل روبه‌رو) قرار بگیرند که البته می‌توانند با هم جابجا شوند. پس در این حالت $\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} \times 2 = 1568$ روش برای آنها وجود دارد.

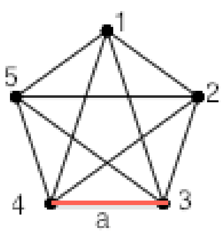
با این توضیحات جواب مساله 2464 می‌شود که متاسفانه در بین گزینه‌ها نیست.

۳۴) گزینه‌ی (الف) درست است.

اگر یکی از مواد اولیه‌ی تولید ماده‌ی a را در یخچال قرار دهیم باید بقیه‌ی مواد اولیه‌ی آن را هم اضافه کنیم. پس می‌توانیم مواد اولیه‌ی ژله‌ی توت‌فرنگی و خامه‌ی شکلاتی را هرکدام در یک جعبه قرار دهیم و با تعیین‌کردن ترتیب مواد در جعبه‌ها، نحوه‌ی ورودشان را به صورت متوالی تعیین کنیم (!3 و !2 روش). به !4 روش می‌توان نحوه‌ی ورود جعبه‌ها به یخچال را تعیین کرد. پس در کل به $4! \times 3! \times 2! = 288$ طریق می‌توان کیک درست کرد.

۳۵) گزینه‌ی (ب) درست است.

ابتدا کش a که رسم نشده‌است را اضافه می‌کنیم و در نهایت تعداد حالت‌هایی که شامل کش a هستند را از جواب کم می‌کنیم (متمم گیری). هر میخ باید به ۲ کش متصل باشد. برای انتخاب یکی از کش‌های میخ ۱، ۴ حالت داریم. فرض کنیم سر دیگر کش، میخ i باشد. از بین کش‌هایی که به i وصل‌اند یکی انتخاب شده پس ۳ انتخاب وجود دارد و برای میخ‌های دیگر به همین ترتیب ۲ و ۱ انتخاب داریم. ترتیب انتخاب کش‌ها اهمیتی ندارد پس کل حالت‌ها را تقسیم بر ۲ می‌کنیم. بنابراین $\frac{4\times3\times2\times1}{2} = 12$ حالت برای انتخاب کش‌ها وجود دارد.



کش a در $3 \times 2 = 6$ تا از حالت‌ها انتخاب شده‌است. (۳ انتخاب برای کش متصل به میخ ۳ و ۲ انتخاب برای کش متصل به ۴)

بنابراین به $12 - 6 = 6$ راه می‌توان کش انتخاب کرد.

۳۶) گزینه‌ی (ج) درست است.

عدد a را در مبنای ۲ نمایش می‌دهیم و عدد b را در مبنای ۱۰: $22 = (10110)_2$

a	1	10	11	100	111	1000	1111	10000	10011	10100	10110
b	1	4	5	12	17	32	49	80	85	92	96

۳۷) گزینه‌ی (ب) درست است.

ادعا می‌کنیم k-1 مهره‌ی رخ را می‌توان به $2^k - 1$ روش در پلکانی با k ردیف پله چید. این ادعا را با استقرا ثابت می‌کنیم.

پایه‌ی استقرا: برای k=1 حکم برقرار است.

گام استقرا: فرض کنیم برای k-1 ردیف پله، $2^{k-1} - 1$ روش برای چیدن k-2 رخ وجود داشته باشد.

برای k ردیف، بالاترین پله را در نظر می‌گیریم، دو حالت پیش‌می‌آید:

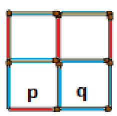
- در این خانه رخ قرار دهیم. در اینصورت ستون سمت چپ حذف می‌شود و طبق فرض استقرا k-2 رخ باقی‌مانده به $2^{k-1} - 1$ حالت چیده می‌شوند.

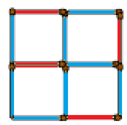
- در این خانه رخ قرار ندهیم. در اینصورت در هرکدام از k-1 ردیف باقی‌مانده باید یک رخ وجود داشته باشد. چیدن آن‌ها را از ردیف بالا شروع می‌کنیم.گذاشتن یک رخ در این ردیف ۲ حالت دارد. برای هرکدام از ردیف‌های دیگر هم با قراردادن رخ‌های قبلی، ۲ حالت بیشتر باقی نمی‌ماند. پس طبق اصل ضرب 2^{k-1} حالت برای چیدن رخ‌ها وجود دارد.

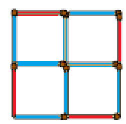
بنابراین در مجموع $2^k - 1$ راه برای چیدن رخ‌ها داریم و حکم ثابت شد. پاسخ مساله به ازای k=8، ۲۵۵ می‌شود.

۳۸) گزینه‌ی (د) درست است.

حالت‌های ممکن و تعداد روش‌هایی که می‌توان آن‌ها را دوران داد تا شکل‌های مجاز بدست آید در شکل‌های A و B و C نشان داده شده است:







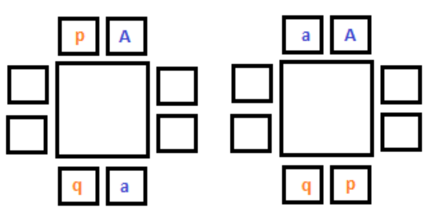
پس درمجموع $8 + 8 + 2 = 18$ روش برای باقی‌گذاشتن ۴ کبریت مطابق خواسته‌ی مساله وجود دارد.

۳۹) گزینه‌ی (د) درست است.

رقم اول از سمت چپ نمی‌تواند ۲ باشد. چون تمام اعداد بدست‌آمده از انتقال از آن کمتر یا مساویند. پس این رقم حتمن ۱ است. اگر ارقام "۱۲" به همین ترتیب در عدد ظاهر شوند بعد از آن همه باید "۱۲" یا "۲۲" باشند. چون اگر "۱۱" باشد $\overline{1211x}$ با انتقال به $\overline{11x12}$ تبدیل می‌شود و اگر "۲۱" باشد $\overline{1221x}$ با انتقال به $\overline{1x122}$ می‌رسد. اعداد زیر ویژگی خواسته شده را دارند:

11112 11222 11212
11122 12222 12122

۴۰) گزینه‌ی (ه) درست است.



نفر اولی که وارد می‌شود ۸ انتخاب دارد و همسر او ۲ انتخاب. در هر ۲ حالت یکی از زوج‌ها باید صندلی‌های p و q را انتخاب کنند و به ۲ روش می‌توانند بنشینند که انتخاب زوج هم ۳ حالت دارد.

نفر بعدی که وارد شود ۴ انتخاب دارد و همسرش ۲ انتخاب. و تنها زوج باقی‌مانده هم در صندلی‌های باقی‌مانده به ۲ روش می‌توانند بنشینند.

پس پاسخ برابر $8 \times 2 \times 3 \times 2 \times 4 \times 2 \times 2 = 1536$ است.