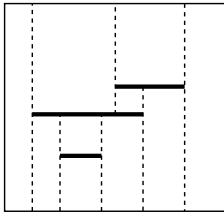


## مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)



(۱) یک مربع بزرگ را در نظر بگیرید. در داخل آن  $1389$  پاره‌خط افقی رسم می‌کنیم به طوری که پاره‌خط‌ها هیچ تقاطع یا تماسی با یکدیگر یا با حاشیه‌ی مربع نداشته باشند. از دو سر هر پاره‌خط یک خط عمودی رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم به طوری که از بالا و پایین به دو پاره‌خط دیگر یا اضلاع افقی مربع برسد. حداکثر تعداد مستطیل‌های مجزا از هم در شکل حاصل چند تاست؟ (مثلاً در شکل مقابل  $10$  مستطیل مجزا وجود دارد).

الف)  $5556$  (ب)  $2780$  (ج)  $5558$  (د)  $4168$  (ه)  $5557$

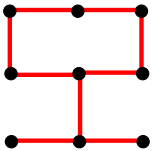
(۲)  $2010$  عدد طبیعی دل‌خواه (نه لزوماً متمایز) کوچک‌تر از  $21389$  را جمع می‌زنیم و حاصل جمع را در مبنای دو نمایش می‌دهیم. حداکثر تعداد یک‌های حاصل جمع این اعداد در مبنای  $2$  چندتا می‌تواند باشد؟

الف)  $1389$  (ب)  $2010$  (ج)  $1399$  (د)  $1396$  (ه)  $1397$

(۳) یک مکعب  $3 \times 3 \times 3$  داریم که شامل  $27$  خانه‌ی واحد  $(1 \times 1 \times 1)$  سفید رنگ است. می‌خواهیم کم‌ترین تعداد خانه‌ی واحد را سیاه کنیم، طوری که هیچ مکعب مستطیل  $2 \times 2 \times 1$  (و دوران‌های آن) وجود نداشته باشد که همه‌ی خانه‌های آن سفید باشد. کم‌ترین تعداد خانه‌های سیاه لازم چند است؟

الف)  $12$  (ب)  $8$  (ج)  $6$  (د)  $7$  (ه)  $9$

(۴) در یک شبکه‌ی  $3 \times 3$  نقطه‌ای، بین هر دو نقطه‌ی مجاور می‌توان یک پاره‌خط به طول  $1$  رسم کرد (حداکثر  $12$  پاره‌خط). یک زیرمجموعه از  $12$  پاره‌خط را «اشباع‌شده» می‌نامیم اگر:



(۱) با رسم پاره‌خط‌های این زیرمجموعه هیچ مربع واحدی  $(1 \times 1)$  ایجاد نشود، و همچنین  
(۲) اگر هر پاره‌خطی که در این زیرمجموعه نیست را اضافه کنیم، حداقل یک مربع  $1 \times 1$  به وجود آید.

تعداد زیرمجموعه‌های مختلف اشباع‌شده چند تاست؟ یکی از آن‌ها در شکل دیده می‌شود.

الف)  $50$  (ب)  $38$  (ج)  $34$  (د)  $42$  (ه)  $46$

(۵)  $20$  سکه‌ی طلا با شماره‌های  $1$  تا  $20$  داده شده که تعدادی از آن‌ها اصل و بقیه بدلی هستند ولی به لحاظ ظاهری کاملاً مشابه‌اند. یک دستگاه در اختیار داریم که  $3$  سکه را می‌گیرد و آن‌ها را در دو خروجی خود قرار می‌دهد، به طوری که سکه‌های اصل در یک خروجی و سکه‌های بدلی در دیگر قرار گیرند. دقت کنید که لزومی ندارد این دستگاه همیشه سکه‌های اصل را در یک خروجی مشخص قرار دهد.

حداقل با چند بار استفاده از دستگاه می‌توان هم‌واره همه‌ی سکه‌ها را برحسب نوع‌شان به دو دسته تقسیم کرد؟ توجه کنید که لازم نیست نوع هر دسته را بدانیم.

الف)  $7$  (ب)  $9$  (ج)  $11$  (د)  $8$  (ه)  $10$

## مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۶) علی یک سکه را آن قدر پرتاب می‌کند تا نتیجه‌ی دو پرتاب متوالی، مثل هم بیاید (هر دو رو یا هر دو پشت). چقدر احتمال دارد که علی بیش از ۴ بار سکه را پرتاب کند؟

- الف)  $\frac{1}{8}$       ب)  $\frac{1}{32}$       ج)  $\frac{1}{4}$       د)  $\frac{1}{16}$       ه)  $\frac{1}{4}$

۷) حداکثر چند مربع  $3 \times 3$  را که تمام گوشه‌های آن‌ها مختصات صحیح دارد می‌توان در صفحه‌ی مختصات رسم کرد به طوری که هر جفت از آن‌ها حداقل در یک مربع  $1 \times 1$  مشترک باشد؟ دقت کنید هیچ دو مربعی نمی‌توانند بر یکدیگر منطبق باشند.

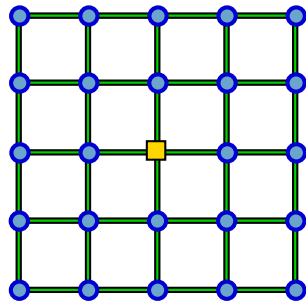
- الف) ۳      ب) ۴      ج) ۹      د) ۱۵      ه) ۱۶

۸)  $n$  سکه دور یک دایره با فواصل مساوی چیده شده‌اند و در ابتدای کار همه‌ی آن‌ها به رو هستند. به ازای هر  $i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$  دقیقاً یک بار  $i$  سکه‌ی متوالی دل‌خواه را انتخاب می‌کنیم و همه‌ی آن‌ها را برمی‌گردانیم. مقدار  $n$  برابر کدام یک از گزینه‌های زیر باشد تا بتوان این  $n$  مرحله را طوری انجام داد که بعد از پایان کار، همه‌ی سکه‌ها در وضعیت اولیه (به‌رو) باشند؟

- الف) ۲۰۰۹      ب) ۱۳۹۱      ج) ۲۰۱۰      د) ۱۳۸۹      ه) ۱۳۹۰

۹) ۳ کلید دو وضعیتیه روی دیوار یک اتاق نصب هستند. هر کلید در هر لحظه در یکی از دو وضعیت ۱ یا ۲ قرار دارد. این وضعیت داخلی است و ما آن را نمی‌دانیم؛ اما می‌توانیم با یک بار فشردن هر کلید، آن را تغییر وضعیت دهیم. از سقف این اتاق نیز یک لامپ آویزان شده است که در ابتدا خاموش است. می‌دانیم لامپ تنها زمانی روشن می‌شود که وضعیت داخلی هر سه کلید یکسان باشد (همه در وضعیت ۱ یا همه در وضعیت ۲). حداقل مقدار  $k$  چند باید باشد تا بتوانیم در هر حالتی با حداکثر  $k$  بار فشردن کلید لامپ را روشن کنیم؟ ( $k$  را تعداد کل فشردن دو کلید در نظر بگیرید).

- الف) ۲      ب) ۳      ج) ۴      د) ۵      ه) لزوماً نمی‌توان لامپ را روشن کرد



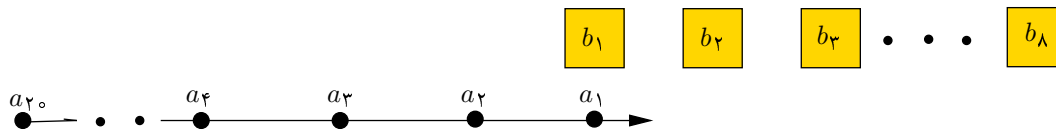
۱۰) شکل زیر یک شهر را با ۲۴ خانه (دایره‌ها) و یک اداره‌ی پست (در مرکز) نشان می‌دهد. این شهر ۴۰ خیابان به طول ۱ دارد که هر خیابان دو محل (خانه یا اداره‌ی پست) را به یکدیگر متصل می‌کند. ۳ پست‌چی وظیفه دارند نامه‌های مردم را از اداره‌ی پست به درب خانه‌شان برسانند. یک روز صبح ۳ پست‌چی که به اداره‌ی پست می‌روند متوجه می‌شوند برای هر خانه دقیقاً یک نامه آمده است. این پست‌چی‌ها می‌خواهند طوری برنامه‌ریزی کنند که رساندن همه‌ی نامه‌ها به مقصد در سریع‌ترین زمان ممکن به پایان برسد. می‌دانیم هر پست‌چی هر خیابان مستقیم (به طول ۱) را در یک دقیقه طی می‌کند و هر پست‌چی در لحظه می‌تواند حداکثر یک نامه در دست داشته باشد. حداقل چند دقیقه پس از شروع کار، همه‌ی نامه‌ها به مقصد می‌رسند؟

- الف) ۳۹      ب) ۲۰      ج) ۴۰      د) ۲۸      ه) ۳۶

## مرحله ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

(۱۱) ۲۰ دانشجو به فاصله ی ۱ متر از هم به ترتیب در یک صف ایستاده اند. هر دانشجو یک کارت دارد که بر روی آن یک عدد صحیح نوشته شده است. در امتداد این صف ۸ میز با شماره های ۱ تا ۸ و با فاصله های یک متر از هم قرار گرفته است. پشت هر میز یک استاد نشسته است و کارتی دارد که بر روی آن عدد ۱۳۸۹ نوشته شده است. (در شکل زیر  $a_i$  ها متناظر دانشجویان و  $b_j$  ها میز استادان است.)

در ابتدا، دانشجوی اول صف درست در مقابل میز شماره ی ۱ قرار دارد. کار در ۱۵ مرحله انجام می شود و در هر مرحله دو سوت زده می شود. با سوت اول هر مرحله، هر دانشجو که مقابل میز یک استاد قرار دارد کارتش را به آن استاد نشان می دهد و در صورتی که عدد کارت دانشجو کم تر از عدد کارت استاد باشد، آن ها کارت هایشان را باهم عوض می کنند. با سوت دوم هر مرحله، همه ی دانشجویان یک متر به جلو می روند.



اگر عدد کارت دانشجویان به ترتیب  $(12, 10, 15, 8, 6, 14, 9, 8, 7, 5, 20, 12, 9, 14, 4, 1, 2, 13)$  باشد  $(a_1 = 12)$ ، پس از پایان ۱۵ مرحله استاد دوم چه کارتی را در اختیار خواهد داشت؟

- الف) ۸      ب) ۳      ج) ۶      د) ۱۴      ه) ۵

(۱۲) در راهروی نقاشی های ارزشمند یک موزه،  $n$  تابلوی نقاشی با شماره های ۱ تا  $n$  در یک ردیف کنار هم به دیوار آویخته شده اند. یک سارق می خواهد از این موزه دزدی کند. او می داند ارزش تابلوی  $i$  ام برابر  $v_i$  است. به دلیل نزدیک بودن تابلوها به هم، اگر سارق تابلوی شماره  $i$  را از دیوار بکند، دو تابلوی مجاور آن با شماره های  $i-1$  و  $i+1$  (در صورت وجود) پاره و بی ارزش می گردند.

هدف سارق سرقت تعدادی از تابلوهای موزه است که مجموع ارزش تابلوهای سرقتی (سود وی) بیشینه شود.  $P(i)$  را برابر بیشینه سود سارق تعریف می کنیم در حالتی که فقط تابلوهای شماره ی ۱ تا  $i$  قابل سرقت هستند. در این صورت کدام رابطه ی زیر برقرار است؟ (فرض کنید  $P(0) = 0$  و  $P(-1) = 0$  قرارداد شده است. منظور از  $\max(a, b)$  مقدار بیشینه ی  $a$  و  $b$  است)

الف)  $P(i) = \max(v_i + P(i-1), P(i-2))$       ب)  $P(i) = v_i + \max(P(i-1), P(i-2))$   
 ج)  $P(i) = P(i-1) + \max(v_i, P(i-2))$       د)  $P(i) = P(i-2) + \max(v_i, P(i-1))$   
 ه)  $P(i) = \max(v_i + P(i-2), P(i-1))$

(۱۳)  $n$  راننده با ماشین های هم اندازه به طول  $L$  می خواهند طوری در یک طرف خیابانی به طول ۱۳۸۹ پارک کنند که یک ماشین تازه وارد، هیچ جای پارکی به طول حداقل  $M$  در همان طرف خیابان نداشته باشد. منظور از جای پارک فاصله ی بین دو ماشین متوالی، و یا فاصله ی بین ابتدا یا انتهای خیابان با نزدیک ترین ماشین است. در کدام یک از گزینه های زیر  $n$  راننده به هدف خود نمی رسند؟ (در هر گزینه  $(n, L, M)$  داده شده است)

- الف)  $(199, 1, 6)$       ب)  $(99, 3, 12)$   
 ج)  $(9, 50, 105)$       د)  $(4, 100, 248)$   
 ه)  $(299, 1, 3)$

## مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

(۱۴) ۲۰ سکه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ و وزن‌های متفاوت در اختیار داریم، ولی وزن هیچ یک از سکه‌ها را نمی‌دانیم. به صفتی از سکه‌ها که از چپ به راست چیده شده‌اند «مرتب» می‌گوییم اگر هر سکه از سکه‌ی سمت راستش سبک‌تر باشد. دستگاه مرتب‌سازی در اختیار داریم که در هر بار استفاده ۱۰ سکه را می‌گیرد و صف مرتب آن‌ها را در خروجی تحویل می‌دهد. حداقل مقدار  $k$  چند باید باشد که در هر حالتی با حداکثر  $k$  بار استفاده از دستگاه بتوانیم صف مرتب همه‌ی سکه‌ها را ایجاد کنیم؟

الف) ۸ (ب) ۶ (ج) ۹ (د) ۵ (ه) ۷

(۱۵) در یک لیگ فوتبال ۸ تیم حضور دارند. هر دو تیم دقیقاً یک بار با هم بازی می‌کنند، هر برد برای برنده ۳ امتیاز و هر مساوی برای هر دو تیم ۱ امتیاز دارد ولی باخت امتیازی ندارد. در پایان مسابقات تیم‌ها در جدول رده‌بندی بر اساس مجموع امتیازشان مرتب می‌شوند، و اگر چند تیم امتیاز برابر کسب کنند بر اساس ترتیب دل‌خواهی در رده‌های متوالی جدول قرار می‌گیرند. می‌دانیم هر تیم حداقل ۱ برد، حداقل ۱ باخت و حداقل ۱ مساوی دارد. حداکثر اختلاف امتیاز تیم اول و سوم جدول رده‌بندی چند امتیاز می‌تواند باشد؟

الف) ۹ (ب) ۸ (ج) ۱۰ (د) ۱۲ (ه) ۱۱

(۱۶) یک الگوریتم بر روی متغیرهای  $n, b, s$  و عملیات زیر را انجام می‌دهد:

- ۱) مقدار  $n$  را به عنوان ورودی بگیر.
- ۲) مقدار  $b$  و  $s$  را برابر ۰ قرار بده.
- ۳) باقی‌مانده‌ی تقسیم  $n$  بر ۲ را در  $r$  بریز.
- ۴) اگر مقدار  $r$  با مقدار  $b$  متفاوت بود مقدار  $s$  را یک واحد افزایش بده.
- ۵) مقدار  $r$  را در  $b$  بریز.
- ۶) مقدار خارج قسمت تقسیم  $n$  بر ۲ را پیدا کن. این مقدار را در  $n$  بریز.
- ۷) اگر مقدار  $n$  بیش‌تر از ۰ بود به مرحله‌ی ۳ برو.
- ۸) مقدار  $s$  را در خروجی چاپ کن.

اگر این الگوریتم را یک بار برای ورودی  $n = 1$ ، یک بار برای ورودی  $n = 2$ ، ... و یک بار برای ورودی  $n = 128$  اجرا کنیم، بیش‌ترین مقداری که در حین این ۱۲۸ اجرای مستقل در خروجی چاپ می‌شود چند است؟

الف) ۹ (ب) ۶ (ج) ۸ (د) ۷ (ه) ۵

## مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

۱۷) الگوریتم زیر مقدار متغیرهای  $a_1, a_2, a_3, a_4$  را از ورودی می‌گیرد، از متغیرهای  $m$  و  $s$  استفاده می‌کند و مقدار  $s$  را در خروجی چاپ می‌کند:

۱) مقدار  $s$  را برابر ۰ قرار بده.

۲) مقدار  $m$  را برابر مقدار  $a_1$  قرار بده.

۳) کار زیر را یک بار برای  $i = 2$ ، یک بار برای  $i = 3$  و یک بار برای  $i = 4$  انجام بده:

اگر مقدار  $a_i$  از مقدار  $m$  بیش‌تر است: مقدار  $a_i$  را در  $m$  بریز و هم‌چنین به مقدار  $s$  یک واحد اضافه کن.

۴) مقدار  $s$  را در خروجی چاپ کن.

مثلاً برای ورودی  $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle = \langle 1, 3, 2, 4 \rangle$  مقدار ۲ در خروجی نوشته می‌شود چرا که شرط سطر سوم تنها برای  $i = 2$  و  $i = 4$  برقرار می‌شود.

می‌دانیم اعداد ۱ تا ۴ را می‌توان به  $24 = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$  حالت مختلف در متغیرهای  $a_1$  تا  $a_4$  قرار داد.

فرض کنید برای تمام این ۲۴ حالت، برنامه‌ی بالا را اجرا می‌کنیم تا ۲۴ عدد در خروجی نوشته شود. حاصل جمع این ۲۴ عدد چند است؟

الف) ۳۲

ب) ۲۶

ج) ۴۸

د) ۳۶

ه) ۳۰

۱۸) ۶ لامپ با شماره‌های ۱ تا ۶ در یک ردیف قرار دارند. عمل  $P(k)$  (که  $1 \leq k \leq 6$ ) وضعیت تمام لامپ‌هایی که شماره‌ی آن‌ها مضرب  $k$  است عوض می‌کند (از روشن به خاموش و از خاموش به روشن). مثلاً  $P(2)$  لامپ‌های شماره‌ی ۲، ۴ و ۶ را تغییر وضعیت می‌دهد و  $P(5)$  فقط وضعیت لامپ شماره ۵ را عوض می‌کند.

مریم وظیفه دارد که وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند و سپس عمل‌های  $P(1)$ ،  $P(2)$ ، ... تا  $P(6)$  را به همین ترتیب انجام بدهد. با این کار او ۷ صحنه از لامپ‌ها خواهد داشت: وضعیت اولیه، وضعیت بعد از انجام  $P(1)$ ، وضعیت بعد از  $P(2)$ ، ... و وضعیت بعد از  $P(6)$ .

امتیاز هر صحنه برابر تعداد لامپ‌های روشن در آن صحنه است. مریم می‌خواهد طوری وضعیت اولیه‌ی لامپ‌ها را تعیین کند که مجموع امتیازهای این ۷ صحنه بیشینه شود. این مقدار بیشینه چند است؟

الف) ۲۹

ب) ۲۴

ج) ۳۶

د) ۲۱

ه) ۱۷

## مرحله‌ی دوم بیستمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تستی)

(۱۹) جدول  $A$  به صورت زیر داده شده است:

۲	۱	۴	۳	۱۱
۵	۴	۶	۱	۶
۱	۲	۳	۱۰	۲
۶	۹	۳	۲	۸
۱	۵	۲	۸	۵

می‌خواهیم در یک جدول  $5 \times 5$  دیگر به اسم  $B$ ، مقادیر ۱ تا ۲۵ را، هر کدام دقیقاً یک بار، به‌گونه‌ای قرار دهیم که مقدار  $S$  کمینه شود. مقدار  $S$  به صورت زیر به دست می‌آید:

جدول  $A$  و  $B$  را روی هم قرار می‌دهیم. در هر خانه دو مقدار روی هم قرار گرفته از جدول  $A$  و  $B$  را در یک‌دیگر ضرب می‌کنیم تا ۲۵ عدد جدید به دست آید. مجموع ۵ عدد جدید هر سطر را جلوی آن سطر می‌نویسیم.  $S$  برابر کوچکترین عدد از میان اعداد جلوی سطرها است.

به‌عنوان مثال اگر مقادیر خانه‌های  $B$  معادل جدول  $5 \times 5$  تعیین شود، اعداد قرار گرفته در مقابل هر سطر برابر جدول  $1 \times 5$  زیر می‌گردد و مقدار  $S$  برابر ۱۷۳ خواهد بود:

۲۷۲	۱	۱۹	۴	۵	۲۰
۱۷۳	۱۳	۱۲	۲	۶	۷
۲۲۱	۹	۳	۸	۱۴	۲۱
۴۴۳	۱۸	۱۱	۱۰	۱۵	۲۲
۴۴۹	۲۵	۱۷	۱۶	۲۴	۲۳

مقدار کمینه‌ی  $S$  به ازای تمام حالت‌های مختلف جدول  $B$  چقدر است؟

الف) ۳۵ (ب) ۴۱ (ج) ۲۹ (د) ۴۶ (ه) ۵۴

(۲۰) ۲۴ طراح در جلسات طرح سوال یک آزمون شرکت کرده‌اند و هریک از آن‌ها تعدادی (بیش از صفر) سوال طرح کرده است. در پایان کار سه شرط زیر می‌بایست برقرار باشد:

- (شرط اطمینان) هر سؤال طرح شده، باید دقیقاً توسط سه نفر دیگر (غیر از طراح آن سؤال) «بازبینی» بشود.
- (شرط عدم تبانی) هیچ طراحی نمی‌تواند بیش از یک سوال از یک طراح دیگر را بازبینی کند.
- (شرط عدالت) به‌ازای هر دو طراح  $A$  و  $B$ ، اگر  $A$  یکی از سؤالات  $B$  را بازبینی می‌کند  $B$  نیز باید دقیقاً یک سؤال از  $A$  را بازبینی بکند.

حداکثر تعداد سؤالات طرح شده چقدر می‌تواند باشد به طوری که تمام شرایط فوق نیز برقرار شود؟

الف) ۱۹۲ (ب) ۱۶۸ (ج) ۲۴ (د) ۹۲ (ه) ۹۶