

مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۱: تبدیل دودویی ۱۵ امتیاز

ماشین مبدل دودویی یک عدد دودویی با n رقم را از ورودی می‌گیرد و با فشار دادن یکی از دو دکمه‌ی آن، یکی از دو تبدیل زیر را روی عدد ورودی انجام می‌دهد.

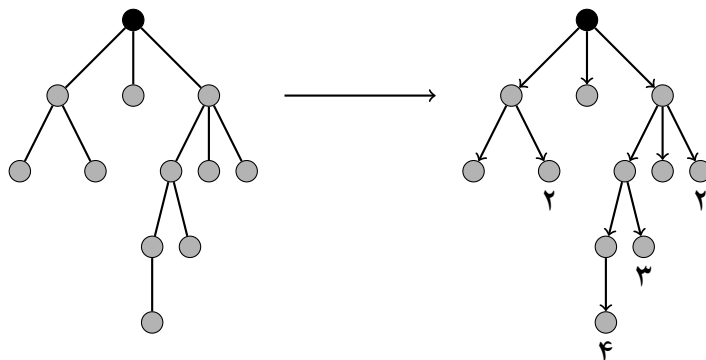
۱. دکمه یک: سمت راست‌ترین رقم را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد.

۲. دکمه دو: سمت راست‌ترین رقم ۱ را پیدا می‌کند و رقم سمت چپ آن را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد. دقت کنید در صورتی که سمت راست‌ترین ۱ در سمت چپ‌ترین مکان باشد یا رشته تمام ۰ باشد، تغییری انجام نمی‌دهد.

برای مثال با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان عدد 001001 را به 011001 تبدیل کرد. روش تبدیل به این صورت است که ابتدا دکمه یک، سپس دکمه دو و در انتها دکمه یک را فشار می‌دهیم. ثابت کنید با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان هر عدد دودویی با n رقم را به هر عدد دودویی با n رقم تبدیل کرد.

مسئله‌ی ۲: پاک کردن درخت ۲۰ امتیاز

گراف همبند و بدون دور را درخت گویند. درخت T را از رأس r به این صورت ریشه‌دار می‌کنیم که درخت را از رأس r آویزان می‌کنیم و تمام یال‌ها را از بالا به پایین جهت‌دار می‌کنیم. به بیانی دیگر یال‌های درخت را به این صورت جهت‌دار می‌کنیم که تمام یال‌های متصل به r را از r به سمت بیرون جهت می‌دهیم، و بقیه یال‌ها را طوری جهت‌دهی می‌کنیم که تعداد یال‌های وارد شده به هر رأس به غیر از r برابر ۱ شود. دقت کنید که در این صورت تعداد یال‌های وارد شده به r برابر صفر است. فاصله ریشه تا رأس دلخواه i ، برابر تعداد یال‌هایی است که برای رسیدن از ریشه به رأس i طی می‌کنیم. برای مثال درخت شکل زیر را از رأس سیاه رنگ ریشه‌دار کرده‌ایم. همچنین فاصله بعضی از رأس‌ها تا ریشه در شکل نشان داده شده است.

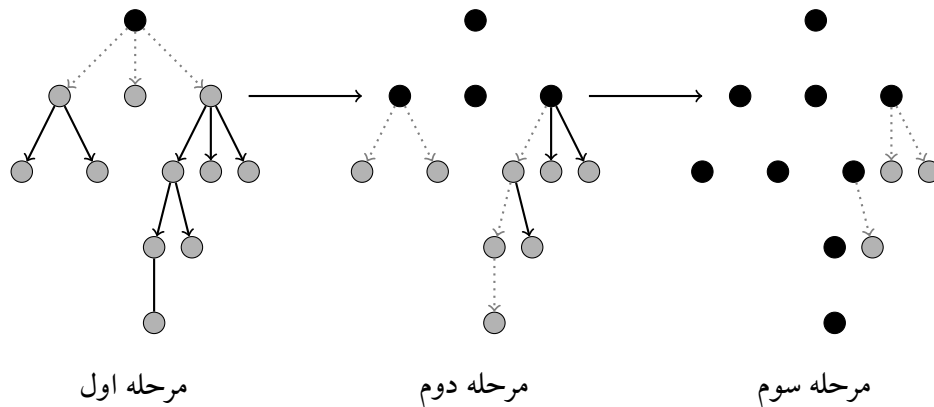


مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

هدف پاک کردن یال‌های یک درخت ریشه‌دار در کمترین تعداد مرحله است. در هر مرحله مجاز به انجام یکی از دو عملیات زیر برای هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده هستیم:

- عملیات اول: تمام یال‌های متصل به ریشه را پاک کن.
- عملیات دوم: یکی از رأس‌هایی که بیشترین فاصله را تا ریشه دارند i انتخاب کن. از ریشه و از روی یال‌ها و در جهت یال‌ها به سمت i حرکت کن و یال‌هایی که از آن‌ها عبور کرده‌ای را پاک کن.

در حقیقت در هر مرحله می‌توان بر روی هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده، هر یک از عملیات اول یا دوم را انجام داد. دقت کنید که با پاک شدن یال‌ها، هر درخت ریشه‌دار به یک یا چند درخت ریشه‌دار تبدیل می‌شود. برای مثال در شکل تمام یال‌های درخت اولیه در ۳ مرحله پاک شده‌اند. در این شکل ریشه‌ی درخت‌ها با رنگ سیاه نشان داده شده‌اند. دقت کنید که بعد از مرحله‌ی اول درخت ریشه‌دار اولیه با ۱۲ رأس، به ۴ درخت ریشه‌دار با ۱، ۱، ۳ و ۷ رأس تبدیل شده است.



(الف) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس داده شده است. روشی ارائه دهید که در ۱۴ مرحله تمام یال‌های آن را پاک کند.

(ب) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس مثال بزنید که در کمتر از ۱۰ مرحله نتوان تمام یال‌های آن را پاک کرد.

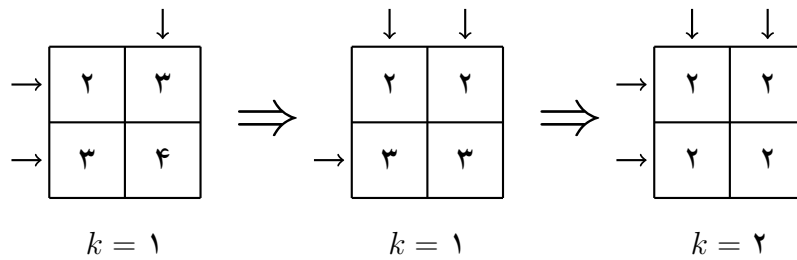
مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۳: جدول جادویی ۲۵ امتیاز

جدول جادویی $n \times n$ جدولی است که برای هر i و j که $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq n$ ، در خانه‌ی (i, j) آن عدد $i + j$ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان این جدول را به صورت زیر تغییر داد.

• در هر مرحله یک زیرمجموعه از سطرها مانند S ، یک زیرمجموعه از ستون‌ها مانند T و یک عدد $k > 0$ انتخاب می‌کنیم. سپس عدد تمام خانه‌های (i, j) که $i \in S$ و $j \in T$ را k واحد کم می‌کنیم.

در مثال زیر تمام اعداد یک جدول جادویی 2×2 در سه مرحله صفر شده‌اند. زیرمجموعه‌های S و T توسط پیکان در شکل نشان داده شده‌اند.



(الف) روشی ارائه دهید که در ۱۵ مرحله تمام اعداد یک جدول جادویی 100×100 را صفر کند.

(ب) ثابت کنید در کمتر از ۱۴ مرحله نمی‌توان تمام اعداد یک جدول جادویی 100×100 را صفر کرد.

مسئله‌ی ۴: مرتب ساز ۲۰ امتیاز

تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n \rangle$ به طول n برابر تعداد اندیس‌های i و j است که $i < j$ و $\pi_i > \pi_j$. برای مثال تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle 1, 3, 4, 2 \rangle$ برابر ۲ و تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle 3, 2, 4, 1 \rangle$ برابر ۴ است. تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت π را با $f(\pi)$ نشان می‌دهیم.

۱۰۰ کارت داریم که پشت هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده است. به بیان دیگر اعداد نوشته شده پشت کارت‌ها تشکیل یک جایگشت می‌دهند. همچنین یک ماشین با ۱۰۰ جایگاه مخصوص کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ در اختیار داریم. کارت‌ها را با ترتیب دلخواه در این ۱۰۰ جایگاه طوری قرار می‌دهیم که در هر جایگاه دقیقاً یک کارت قرار گیرد. کارت‌ها طوری قرار داده شده‌اند که عدد نوشته شده پشت آن‌ها را نمی‌بینیم. دقت کنید که هر وضعیت قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین مشخص کننده‌ی یک جایگشت π است. جایگشت π به این صورت مشخص می‌شود که عدد نوشته شده بر روی کارت موجود در جایگاه i ماشین نشان‌دهنده‌ی π_i است. وضعیت ایده‌آل وضعیتی است که کارت با عدد i در جایگاه با شماره i قرار گیرد. هدف رسیدن به وضعیت ایده‌آل است. برای رسیدن به این هدف می‌توان در هر مرحله به صورت زیر عمل کرد:

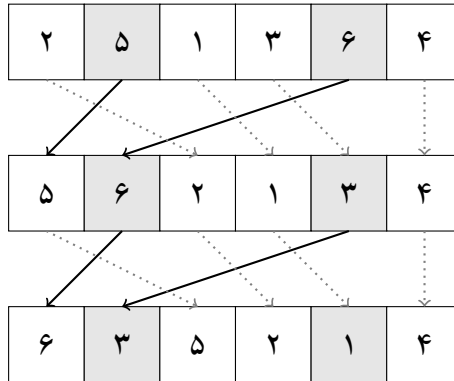
• دو عدد i و j را به ماشین می‌دهیم. فرض کنید وضعیت فعلی ماشین مشخص کننده‌ی جایگشت π است. ماشین کارت‌های موجود در جایگاه i و j را با هم جابجا می‌کند. فرض کنید وضعیت ماشین در حالت جدید مشخص کننده‌ی جایگشت π' است. ماشین علاوه بر جابجایی کارت‌های موجود در جایگاه i و j مقدار $f(\pi') - f(\pi)$ را نیز در خروجی نشان می‌دهد.

روشی ارائه دهید که برای هر گونه وضعیت اولیه قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین، آن‌ها را در ۱۹۸ مرحله به وضعیت ایده‌آل تبدیل کند.

مرحله‌ی دوم بیست و یکمین المپیاد کامپیوتر کشور (بخش تشریحی)

مسئله‌ی ۵: ماشین درهم ساز ۲۰ امتیاز

n کارت روی n خانه‌ی متوالی قرار گرفته‌اند. بر روی کارت‌ها جایگشت π از اعداد ۱ تا n نوشته شده است. ابتدا عدد دلخواه k را انتخاب می‌کنیم و k تا از خانه‌ها را علامت می‌زنیم. سپس در هر مرحله کارت‌های خانه‌های علامت خورده، با حفظ ترتیب، برداشته شده و به k خانه‌ی ابتدایی منتقل می‌شوند. $n - k$ کارت دیگر نیز با حفظ ترتیب در $n - k$ خانه‌ی انتهایی قرار داده خواهند شد. مثالی از انجام این حرکت در دو مرحله در زیر آمده است. در این مثال خانه‌های علامت زده شده با رنگ تیره مشخص شده‌اند.



الف) آیا به ازای هر انتخاب اولیه‌ی خانه‌های علامت‌دار، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ می‌دهد؟

«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به خود آن جایگشت تبدیل شود.»

ب) آیا انتخاب اولیه‌ی خانه‌های علامت‌دار وجود دارد که، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ دهد؟

«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به جایگشت صعودی مرتب شده‌ی ۱ تا n تبدیل شود.»

موفق باشید!