

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

مسئله‌ی ۱: مرتب سازی ۲۰ امتیاز

دنباله A شامل n^2 عدد طبیعی، داده شده است. می‌دانیم هر یک از اعداد ۱ تا n دقیقاً n بار در این دنباله آمده‌اند. می‌خواهیم این دنباله را به صورت صعودی مرتب کنیم. در هر مرحله می‌توان n عضو این دنباله را انتخاب کرده و آن‌ها را به یک ترتیب دلخواه در مکان‌های قبلی‌شان نوشت. می‌خواهیم در کمترین تعداد مرحله، دنباله را مرتب کنیم. به عنوان مثال، دنباله زیر در ۲ مرحله مرتب می‌شود:

$$\langle 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 1 \rangle \Rightarrow \langle 1, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 3 \rangle \Rightarrow \langle 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3 \rangle$$

ثابت کنید هر دنباله دلخواه A را می‌توان در حداکثر $n + 1$ مرحله مرتب کرد.

مسئله‌ی ۲: جاده‌ها ۲۵ امتیاز

کشور آتلانتیس دارای $2n$ شهر است که هر دو شهر با یک جاده (خاکی یا آسفالت) مستقیم به یکدیگر متصل هستند. یک روز، وزارت راه این کشور که سابقه طولانی در اتخاذ تصمیم‌های عجیب و غریب دارد، تصمیم می‌گیرد تا شهرهای کشور را به دو استان (نه لزوماً با تعداد شهرهای برابر) تقسیم کند. این تصمیم باید طوری اجرایی شود که هر جاده میان دو شهر در یک استان، آسفالت باشد. برای انجام این هدف، وزارت راه در نظر دارد هر روز n جاده که هیچ دو جاده‌ای به یک شهر منتهی نیستند را انتخاب کرده و همه‌ی جاده‌های خاکی انتخاب شده را آسفالت و همه‌ی جاده‌های آسفالت انتخاب شده را خاکی کند. با فرض این که نوع جاده‌ها در روز آغازین دلخواه هستند، آیا وزارت راه موفق می‌شود کشور را به دو استان با شرایط گفته شده تقسیم کند؟

مسئله‌ی ۳: خرگوش نامرئی ۲۵ امتیاز

۱۳۹۱ سکو در یک ردیف قرار دارند و یک خرگوش نامرئی روی یکی از سکوها نشسته است. می‌خواهیم این خرگوش را شکار کنیم. در هر مرحله می‌توانیم به یکی از این سکوها شلیک کنیم. اگر خرگوش روی سکویی که به آن شلیک شده نشسته باشد، شکار می‌شود؛ در غیر این صورت به علت ترس از صدای تیراندازی، روی یکی از دو سکوی مجاورش (در صورت وجود) می‌پرد. روشی برای تیراندازی‌ها ارائه دهید که مطمئن باشیم بعد از حداکثر ۱۰۰۰۰ شلیک، خرگوش حتماً شکار می‌شود.

مرحله‌ی دوم بیست و دومین المپیاد کامپیوتر کشور

بعد از انجام تحقیقات مرحله دوم مشخص شد که این رایانه دارای یک دستور عجیب نیز هست که تعداد بیت‌های در اندیس‌های زوج یک عدد که دارای مقدار ۱ هستند را در یک خانه حافظه ذخیره می‌کند. برای استفاده از این دستور باید به شکل زیر عمل کرد:

CNT a, b

بعد از اجرای این دستور، تعداد بیت‌های ۱ در اندیس‌های زوج عدد در حافظه b (یا عدد ثابت b) در خانه حافظه a ذخیره می‌شود. به عنوان مثال بعد از اجرای برنامه زیر، عدد ۲ در متغیر z ذخیره می‌شود، زیرا بیت‌های a_2 و a_1 دارای مقدار ۱ خواهند بود:

ADD a, 00000002, 00000005

CNT z, a

توجه: در هر قسمت ابتدا برنامه خود را نوشته و سپس آن را در چند سطر توضیح دهید.

الف) برنامه‌ای بنویسید که با استفاده از ۴ دستور، تعداد بیت‌های با مقدار ۱ عددی را که در حافظه a ذخیره شده است را در حافظه z ذخیره کند.

ب) اولین برنامه‌ای که برای این کامپیوتر کشف شد، برنامه‌ای بود که تعداد تکرارهای رشته ۰۱ را در نمایش دودویی عددی که در حافظه a ذخیره شده است، به شرطی که ۰ در یک اندیس فرد و ۱ در یک اندیس زوج آمده باشد را محاسبه و در حافظه z ذخیره می‌کرد. به عنوان مثال اگر عدد درون حافظه a برابر $DDABCDEF$ باشد، این مقدار برابر ۳ است.

$a = 11011101101010111100110111101111$

برنامه‌ای با حداکثر ۴ دستور بنویسید تا این کار را انجام دهد. برای برنامه خود شیوه کارکرد آن را در چند سطر توضیح دهید.

پ) بعد از کشف برنامه قسمت قبل، محققان برنامه‌ای را پیدا کردند که عملکرد دستور CNT را شبیه‌سازی می‌کرد. اما متأسفانه یک عدد در دستور آخر برنامه قابل خواندن نبود. این برنامه به شکل زیر است: (می‌توانید فرض کنید عدد درون حافظه a برابر ۵۵۵۵۵۵۵۵ نیست)

AND b, a, 55555555

SHR c, b, 00000002

ADD d, b, c

AND e, d, 33333333

MLT f, e, 11111111

SHR z, f, ...

عدد مربوط به مکان خالی را کامل کنید و راه حل خود را توضیح دهید.

موفق باشید!