- سؤال‌های **۱۲ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ رستم ۱۳۹۴ سکه با شماره‌های ۱ تا ۱۳۹۴ بر روی میز قرار داده است. تعدادی از این سکه‌ها عادی (یک رو شیر و یک رو خط) و بقیه‌ی سکه‌ها هر دو رو شیر هستند (این تعداد می‌تواند صفر هم باشد). سهراب می‌خواهد تعداد سکه‌های هر دو رو شیر را پیدا کند ولی چشمانش بسته است. او تنها می‌تواند در هر حرکت تعدادی از سکه‌ها را انتخاب کرده و از رستم بخواهد آنها را پشت و رو کند. پس از آن رستم تعداد سکه‌های روی میز که به سمت شیر هستند را به سهراب می‌گوید.
سهراب می‌داند در ابتدای کار دقیقا ۱۰۰ سکه به سمت شیر هستند، حداقل چند حرکت لازم است تا سهراب تعداد سکه‌های دو رو شیر را بیابد؟

۱) ۱۳۹۳ ۲) ۱ ۳) ۱۳۹۴ ۴) ۱۱ ۵) ۱۰

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر در حرکت اول سهراب تمامی سکه‌ها را پشت و رو کند به هدف می‌رسیم. می‌دانیم سکه‌های دو رو شیر تنها در بین ۱۰۰ سکه‌ای هستند که ابتها شیر بودند. اگر هیچ‌کدام از آنها اینگونه نباشند جواب سهراب ۱۲۹۴ خواهد بود. ولی به ازای هر سکه‌ی دو رو شیر، این تعداد افزایش می‌یابد. در نتیجه اگر سهراب x را اعلام کند، تعداد سکه‌های دو رو شیر برابر $x - ۱۲۹۴$ است. □

۲ می‌خواهیم در خانه‌های جدول زیر، اعداد ۱ تا ۹ را قرار دهیم، به صورتی که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر قطر، برابر باشد. جای دو تا از اعداد (۱ و ۵) نیز مشخص شده است.

	۵	۱

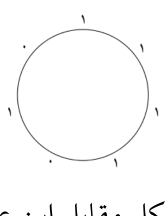
برای یک خط مانند L در صفحه، $f(L)$ برابر مجموع اعداد خانه‌هایی از جدول است که با آن خط، تقاطع دارند (یک خانه از جدول با خط L تقاطع دارد، اگر حداقل ۲ نقطه‌ی مشترک با آن خط داشته باشد). بیشینه‌ی ممکن $f(L)$، در میان تمام جدول‌ها و خط‌های ممکن چند است؟ (هر خانه از جدول یک مربع به طول واحد است)

۱) ۲۵ ۲) ۳۲ ۳) ۳۱ ۴) ۲۷ ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر دوران‌ها و حالت‌های متقارن را یکی در نظر بگیریم، جدول به صورت یکتا پر می‌شود. هم‌چنین خط حداکثر می‌تواند از ۵ خانه بگذرد. اگر خط بخواهد از ۸ بگذرد، حداکثر مجموع ۲۷ را تولید خواهد کرد. اگر از ۸ نگذرد نیز، $۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۹ = ۳۱$ بیشینه‌ی ممکن خواهد بود که مثال آن وجود دارد. □

۳ می‌خواهیم ۷ رقم ۰ و ۱ را دور دایره بچینیم. می‌گوییم رشته‌ی S در این چینش آمده است، اگر چند رقم متوالی در دایره وجود داشته باشند که با کنار هم قرار دادن‌شان به ترتیب ساعت‌گرد، رشته‌ی S تشکیل شود. تعداد دفعات وجود S در چینش را $f(S)$ می‌نامیم.



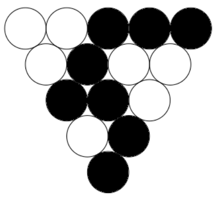
برای مثال، در چینش روبرو، $f(۱۱۰) = ۱$ و $f(۱۱) = ۳$ و $f(۰۱۱۱۰) = ۰$ است.
یک چینش اعداد دور دایره را در نظر بگیرید. به ازای هر رشته‌ی دودویی S که حداکثر ۳ رقم دارد، $۲^{f(S)}$ را محاسبه می‌کنیم و این مقادیر را با هم جمع می‌کنیم (به عنوان مثال در شکل مقابل این عدد برابر ۷۰ می‌شود). عدد نهایی حداقل چند است؟ (برای رشته‌هایی که در چینش وجود ندارند $f(S) = ۰$ است.)

۱) ۵۵ ۲) ۵۱ ۳) ۵۶ ۴) ۶۳ ۵) ۵۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای رشته‌های یک رقمی بهترین حالت این است ۴ تا از اعداد یکسان باشند.
به ازای رشته‌های دو رقمی بهترین حالت این است که از سه حالت ۲ بار و از یک حالت ۱ بار وجود داشته باشد.
و در نهایت به ازای رشته‌های سه رقمی بهترین حالت این است که از هر حالت حداکثر یک بار آمده باشد و از یک رشته اصلا نیاید.
اگر دنباله دور دایره به صورت ۱۱۱۰۰۱۰ باشد به چنین حالتی می‌رسیم و در نتیجه این جواب بهینه است. با محاسبه‌ی مجموع اعداد فوق عدد ۵۳ بدست می‌آید که پاسخ مسئله است. □

۴ ۱۵ دایره همانند شکل روبرو داریم. هر دایره می‌تواند سفید یا سیاه باشد. رنگ دایره‌ها به صورت زیر مشخص می‌گردد:

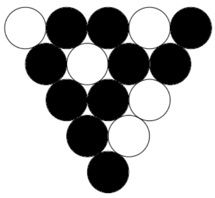


- دایره‌های سطر بالا به صورت مستقل می‌توانند سفید یا سیاه باشند.
- بقیه‌ی دایره‌ها (همه به جز سطر بالا) به رنگ سیاه هستند، اگر و تنها اگر دو دایره‌ی مجاور سطر بالای آن ناهمرنگ باشند.

در بین تمامی حالات ممکن، حداکثر چند دایره‌ی سیاه می‌توانیم داشته باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۹ ۴) ۱۲ ۵) ۱۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.



شکل مقابل روشی را نشان می‌دهد که ۱۰ دایره‌ی سیاه داریم. از طرف دیگر در هر چهار مثلثی که در شکل نشان داده شده حداقل یک دایره‌ی سفید داریم، در نتیجه جواب حداکثر ۱۱ خواهد بود. اگر حالتی وجود داشته باشند که جواب ۱۱ باشد، سه خانه‌ی دیگر سیاه خواهند بود ولی با فرض سیاه بودن آنها می‌توان دایره‌ها را پر کرد که در این صورت به ۱۱ دایره نمی‌رسیم. □

۵ در مسئله‌ی قبل، فرض کنید تمامی حالات ممکن را روی تخته کشیده‌ایم. در مجموع چند دایره‌ی سیاه خواهیم داشت؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۵۶ ۴) ۲۰۸ ۵) ۲۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

می‌توان مجموع دایره‌های سیاه هر سطر را بصورت مجزا محاسبه نمود و در نهایت اعداد پنج سطر را با هم جمع کرد.
در هر سطر هر وضعیت، یک حالت معکوس دارد که رنگ همه‌ی دایره‌ها برعکس شده‌اند. از طرف دیگر مستقل از انتخاب رنگ دایره‌ها، هر وضعیت در یک سطر مشخص در تعداد وضعیت یکسانی ظاهر می‌شود (چون برای سطر بالایی آن ۲ انتخاب داریم، برای سطر دو تا بالاتر ۴ انتخاب و ... تا به سطر اول برسیم). بدین ترتیب بصورت میانگین در هر سطر نیمی از دایره‌ها سفید و نیمی سیاه هستند. پس جواب برابر است با تعداد کل دایره‌ها تقسیم بر ۲ که می‌شود: $۲۴۰ = \frac{۱۵\times ۲^{۵}}{۲}$. □

۶ یک جایگشت

$$\pi = \langle \pi_{۱}, \pi_{۲}, \ldots, \pi_{۹} \rangle$$

از اعداد $۱, ۲, \ldots, ۹$ را در نظر بگیرید. عدد جایگشت π برابر تعداد اعضایی از جایگشت مانند π_i است که زوجیت i و π_i برابر باشد. برای مثال عدد جایگشت $\langle ۸, ۹, ۷, ۱, ۲, ۴, ۳, ۶, ۵ \rangle$ برابر ۵ است. با در نظر گرفتن تمام جایگشت‌های ممکن، به طور میانگین عدد یک جایگشت چند است؟

۱) $\frac{۸۱}{۱۹}$ ۲) $\frac{۱۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴۱}{۹}$ ۴) ۵ ۵) $\frac{۹}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

می‌توان با حالت‌بندی و شمارش مسئله را حل کرد اما راه ساده‌تر به شرح زیر است:
a_i را برابر احتمال آن که زوجیت i و π_i برابر باشد در نظر می‌گیریم. در امید ریاضی این خاصیت وجود دارد که امید ریاضی جمع چند متغیر برابر با جمع امید ریاضی تک تک آن متغیرهاست؛ پس امید ریاضی خواسته شده، برابر با جمع a_iـ ها است. پس مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\frac{۴ \times ۴ + ۵ \times ۵}{۹} = \frac{۴۱}{۹}$$

□

۷ یک عدد را **وارونه** می‌گوییم، هر گاه به صورت $\frac{۱}{n}$ باشد که n عددی طبیعی است. می‌خواهیم عدد ۱ را به صورت جمع k عدد وارونه‌ی متمایز بنویسیم. به ازای چند مقدار $۲ \leqslant k \leqslant ۶$ می‌توان این کار را انجام داد؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۵ ۴) ۰ ۵) ۴

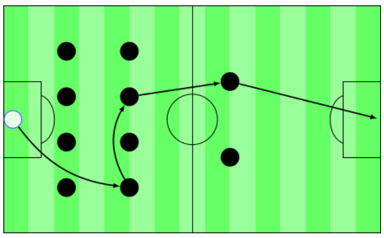
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای $k = ۲$ نمی‌توان این کار را انجام داد زیرا باید $\frac{۱}{j} + \frac{۱}{i} = ۱$ باشد. اگر $i = ۱$ یا $j = ۱$ باشد، حاصل از ۱ بیش‌تر می‌شود. پس $i, j \geqslant ۲$ و از طرفی نمی‌توانند هر دو برابر ۲ باشند. پس حاصل کم‌تر از ۱ خواهد شد.
به ازای $k = ۳$ کار به شکل زیر قابل انجام است:

$$۱ = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۶}$$

حال فرض کنید کار به ازای $k = m$ برقرار باشد. مخرج تمام کسرها را ضرب در ۲ کنید و حاصل را با $\frac{۱}{۲}$ جمع کنید. به این ترتیب کار برای $k = m + ۱$ نیز انجام می‌شود. پس به ازای $k = ۳, ۴, ۵, ۶$ کار قابل انجام است.
□

۸ تیم فوتبال سلطان، با سیستم ۲ − ۴ − ۴ بازی می‌کند؛ یعنی ۱ دروازه‌بان، ۴ مدافع و ۴ هافبک و ۲ مهاجم دارد. هر توپی که به یک بازیکن در این تیم می‌رسد، یا آن را با یک شوت، تبدیل به گل می‌کند یا پاس می‌دهد.



هیچ بازیکنی حق ندارد به بازیکنی پاس بدهد که قبلا توپ به او رسیده و یا در خطوط عقب‌تر بازی می‌کند؛ برای مثال یک هافبک نمی‌تواند به یک مدافع پاس بدهد، اما می‌تواند به یک هافبکی که توپ به آن نرسیده و یا یک مهاجم پاس بدهد.

فرض کنید توپ در ابتدا در اختیار دروازه‌بان است و تیم می‌خواهد یک گل بزند (همانند شکل زیر). به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟ (حتی دروازه‌بان هم می‌تواند با یک ضربه‌ی مستقیم گل بزند.)

۱) ۲۳۰۴   ۲) ۱۱۵۲   ۳) ۵۰۴۳   ۴) ۲۸۶۲۵   ۵) ۲۱۱۲۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

فرض کنید یک خط در این سیستم k نفر داشته باشد. می‌خواهیم تعداد حالاتی را از لحظه‌ی رسیدن توپ به یکی از بازی‌کنان این خط تا لحظه‌ی بیرون کردن توپ از این خط (با پاس رو به جلو یا شوت) حساب کنیم. این تعداد حالات را a_k می‌نامیم. یک حالت وجود دارد که توپ اصلن به هیچ یک از بازی‌کنان این خط نرسد. در غیر این صورت k حالت برای انتخاب بازی‌کن شروع کننده در این خط وجود دارد. انجام بقیه‌ی کار به $a_{k-۱}$ حالت توسط بقیه‌ی بازی‌کنان این خط قابل انجام است. پس

$$a_k = ka_{k-۱} + ۱$$

حال طبق اصل ضرب پاسخ برابر "تعداد حالات توپ در خط دفاعی ضرب در تعداد حالات توپ در خط هافبک ضرب در تعداد حالات توپ در خط حمله" است. پس پاسخ برابر

$$a_۴ \times a_۴ \times a_۲$$

خواهد بود. از طرفی

$$a_۱ = ۲, a_۲ = ۲ \times ۲ + ۱ = ۵, a_۳ = ۳ \times ۵ + ۱ = ۱۶, a_۴ = ۴ \times ۱۶ + ۱ = ۶۵$$

پس پاسخ برابر

$$۶۵ \times ۶۵ \times ۵ = ۲۱۱۲۵$$

است. □

۹ سه توپ سیاه و سه توپ سفید داریم که به شکل زیر، در هفت جعبه جای گرفته‌اند:

فاصله‌ی دو جعبه تعداد جعبه‌های بین آن دو است. برای مثال فاصله‌ی دو جعبه‌ی مجاور صفر است. در هر حرکت می‌توان یک توپ که فاصله‌ی جعبه‌اش با یک جعبه‌ی خالی، حداکثر یک است را به خانه‌ی خالی انتقال داد. می‌خواهیم به حالتی برسیم که سه توپ سفید در سه جعبه‌ی سمت چپ و سه توپ سیاه در سه جعبه‌ی سمت راست باشند. حداقل چند حرکت برای این کار لازم است؟

۱) ۱۴   ۲) ۱۳   ۳) ۱۵   ۴) ۱۷   ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

تعداد جابجایی‌ها برای هر توپ چهار خانه است. در نتیجه هر توپ حداقل باید دو حرکت انجام دهد تا به خانه‌ی هدفش برسد (۱۲ حرکت). از طرف دیگر حرکت اول و آخر همواره شامل یک واحد حرکت هستند. در نتیجه هر کدام از آن مهره‌ها باید یک حرکت اضافه‌تر انجام دهند که در مجموع ۱۴ حرکت می‌شود.
اگر ۱۴ جواب مسئله باشد باید بتوان با همین روند (بجز دو حالت همواره حرکات ۲ واحدی) به انتها رسید. کافیست از حرکت اول دنباله‌ی حرکت را پیگیری کنیم تا ببینیم پس از پنج حرکت بازی به حالتی می‌رسد که باید یک حرکت یک واحدی اضافی انجام شود و در نتیجه تعداد حرکات برای رسیدن به جواب ۱۵ می‌شود.
از طرفی با ادامه دادن همین روند مثالی با ۱۵ حرکت هم یافت می‌شود. □

۱۰ جایگشت $a_۱, a_۲, \cdots, a_۶$ از اعداد ۱ تا ۶ را در نظر بگیرید. در ابتدا یک عدد را به دل‌خواه انتخاب می‌کنیم و سپس در هر مرحله اگر عدد a_i انتخاب شده بود در مرحله‌ی بعد به ازای $a_i \neq ۶$ عدد $a_{a_i+۱}$ و برای $a_i = ۶$ عدد $a_۱$ انتخاب می‌شود. به ازای چند جایگشت مختلف می‌توان عدد اول را به گونه‌ای انتخاب کرد که بعد از تعدادی مرحله، همه‌ی اعداد جایگشت حداقل یک‌بار انتخاب شده باشند؟

۱) ۳۴۵ ۲) ۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۷۲۰ ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

برای هر جایگشت می‌توان یک نوع دیگر گراف جایگشت ساخت به طوری که از هر عدد به عدد بعدی یک یال جهت‌دار رسم کرد حالا ما می‌خواهیم گراف جایگشت یک دور به طول ۶ باشد که برای این کار !۵ حالت وجود دارد. □

۱۱ مجموعه‌ی $S = \{۱, ۲, ..., ۷\}$ داده شده است. دو تابع داریم:
$f(A)$ که مکمل زیرمجموعه‌ی A و $g(A, B)$ که اشتراک A و B را می‌دهد.
یک کیسه داریم که همه‌ی زیرمجموعه‌های S را درون آن ریخته‌ایم. می‌خواهیم تعدادی زیرمجموعه از کیسه بیرون آوریم تا با استفاده از آن‌ها و توابع بتوان تمام زیرمجموعه‌های S را تولید کرد (برای تولید زیرمجموعه‌ها می‌توان از هر زیرمجموعه به تعداد دل‌خواه استفاده کرد).
فرض کنید $\{۱, ۲, ۵, ۶\}$، $\{۲, ۵, ۳\}$ و $\{۵, ۶\}$ را از کیسه بیرون آورده‌ایم. حداقل چند زیرمجموعه‌ی دیگر از کیسه بیرون بکشیم تا مطمئن باشیم با آن‌ها می‌توان مسئله را حل کرد؟

۱) ۱ ۲) ۶۲ ۳) ۶۷ ۴) ۶۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

از اشتراک هر ۳ مجموعه به مجموعه‌ی $\{۵\}$ می‌رسیم. از تفریق این مجموعه و مجموعه‌ی $\{۵, ۶\}$ به $\{۶\}$ می‌رسیم. از تفریق دو مجموعه‌ی اول به دو مجموعه‌ی $\{۲, ۳\}$ ، $\{۱, ۲\}$ می‌رسیم که ما را به مجموعه‌های ۱ تا ۳ می‌رساند. نکته اینجاست که در هر مجموعه‌ای که در نظر بگیریم یا ۴ و ۷ هر دو نیامده‌اند یا هر دو آمده‌اند. بنابراین با هیچ تابعی بر حسب مجموعه‌های فعلی نمی‌توان به مجموعه‌هایی رسید که یکی از این دو را داشته باشد. در ضمن کافی است مجموعه‌ای داشته باشیم شامل یکی از این دو. با استفاده از عملیات تفریق و مجموعه‌های تک عضوی بدست آمده ابتدا به مجموعه‌ی تک عضوی ۴ یا ۷ می‌رسیم... سپس با استفاده از این توابع به هر زیرمجموعه‌ای خواستیم می‌رسیم. بنابراین این کار را تا زمانی می‌توان ادامه داد که به مجموعه‌ای برسیم که یکی از ۴ یا ۷ را داشته باشد. تعداد مجموعه‌هایی که یا هردوی ۴ و ۷ را دارند یا هیچکدام برابر با $۶۴ = ۲^۶$ می‌باشد. بنابراین کافی است ۶۵ عضو داشته باشیم تا مساله حل شود. از آنجا که در ابتدا ۳ عضو داریم، ۶۲ جواب خواهد بود. □

یک کلمه درون یک پرونده‌ی متنی داده شده است و می‌خواهیم با کم‌ترین تعداد اعمال کپی (Copy) و درج (Paste) تعداد مشخصی نسخه از آن ایجاد کنیم.
در هر مرحله می‌توانیم تعداد دل‌خواهی از کلمات نوشته‌شده درون پرونده را در حافظه کپی کنیم و یا کلمات درون حافظه را در پرونده درج کنیم. (مثل کپی و پیست در ویرایشگرها، می‌توان یک بار کپی کرد و سپس چند بار درج کرد.)
هر کپی ۱ واحد و هر درج نیز ۱ واحد هزینه دارد.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۲ با حداقل چند واحد هزینه می‌توانیم دقیقا ۹۹ کلمه‌ی دیگر مشابه با کلمه‌ی اول ایجاد کنیم؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۱۴ ۴) ۱۰ ۵) ۲۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر یک بار کپی و یک بار پیست کنیم در نهایت با ۱۴ حرکت می‌توان به عدد صد رسید. اما اگر در ابتدا یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، سپس یک بار کپی و دو بار پیست کنیم، و سپس یک بار کپی و سه بار پیست کنیم به عدد ۳۶ می‌رسیم. حال اگر ۳۲ کلمه را کپی کنیم و دو بار پیست کنیم ۱۰۰ کلمه خواهیم داشت و تعداد حرکات ۱۳ تا شده است.
برای اثبات کمینه بودن پاسخ سوال بعدی را ببینید. □

۱۳ با ۱۴ واحد هزینه حداکثر چند کلمه (با احتساب کلمه‌ی اولیه) می‌توان ایجاد کرد؟

۱) ۱۰۰ ۲) ۱۲۸ ۳) ۲۴۳ ۴) ۸۱ ۵) ۱۶۲

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

کافی است $f(k)$ را بیش‌ترین تعداد کلمه با k واحد هزینه تعریف کنیم. به سادگی می‌توان دید که:

$$f(۲) = ۲, f(۳) = ۳, \ldots, f(n) = \max_k\{kf(n-k)\}$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$f(۱۲) = ۸۱, f(۱۳) = ۱۰۸, f(۱۴) = ۱۶۲$$

□

فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $a_۱$ تومانی، $a_۲$ تومانی و ... داریم و بخواهیم مقدار n تومان را پرداخت کنیم (پرداخت یک‌طرفه است یعنی نمی‌توانیم مقداری را بپردازیم و بقیه‌ی پول را پس بگیریم). در صورتی که بتوان n تومان را پرداخت کرد، n را عددی **خوب** می‌گوییم. برای مثال اگر اسکناس‌های ۵۰, ۱۰۰, ۲۰۰, ۵۰۰ و ۱۰۰۰ تومانی داشته باشیم، ۲۹۰۰ عددی خوب است؛ اما ۲۹۵۳ عددی خوب نیست. هم‌چنین عددی مانند n را **عجیب** گوییم، اگر بتوان n تومان را پرداخت کرد؛ طوری که از هر نوع اسکناس حداکثر یک بار استفاده شود. در مثال قبل ۹۰۰ عجیب نیست.
اگر n یک عدد خوب باشد، کمینه‌ی تعداد اسکناس‌ها برای پرداختش را $f(n)$ می‌نامیم. فرض کنید یک نفر الگوریتم زیر را برای پرداخت انتخاب کند:
در هر مرحله بزرگ‌ترین اسکناسی که مقدار آن از n بیش‌تر نیست را انتخاب می‌کنیم. این مبلغ را پرداخت می‌کنیم و برای باقی پول همین روش را ادامه می‌دهیم تا پرداخت به طور کامل انجام شود.
عدد n را **زیبا** گوییم، اگر تعداد اسکناس‌هایی که با الگوریتم بالا پرداخت می‌کنیم، برابر $f(n)$ شود. به یک کشور، **افسانه‌ای** گوییم، اگر تمام اعداد طبیعی خوب، زیبا نیز باشند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۴ فرض کنید در یک کشور، اسکناس‌های $۱, ۳, ۳^۲, ۳^۳, \ldots$ تومانی داشته باشیم. می‌خواهیم یک نوع اسکناس از بین گزینه‌های زیر به اسکناس‌های‌مان اضافه کنیم. با اضافه کردن کدام گزینه تعداد اعداد عجیب n که $۱ \leqslant n \leqslant ۲۴۹$ بیش‌تر از بقیه گزینه‌ها است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

در صورتی که یک سکه مثل a اضافه شود به ازای هر عدد مثل i که قبلا تولید می‌شد می‌توان یک عدد تولید کرد به صورت $i+a$ مگر اینکه این عدد خود قابل تولید توسط اعداد قبلی باشد. هرچه تعداد این اعداد مشترک کمتر باشد اعداد عجیب بیشتری خواهیم داشت. حال به ازای هر a باید ببینیم در چند حالت i و $+a$ هر دو عجیب هستند.
اگر اعداد را در مبنای ۳ بنویسیم اعدادی عجیب هستند که تنها از ارقام ۰ و ۱ تشکیل شده باشند. حال با این ویژگی اگر $a = ۲$ باشد تنها زمانی i و $i + ۲$ عجیب هستند که دو رقم سمت راست i برابر ۰۱ باشد. به همین ترتیب برای $a = ۴$ باید دو رقم آخر ۰۰، برای $a = ۵$ باید سه رقم آخر ۰۱۱، برای $a = ۶$ باید سه رقم آخر ۰۱۱ یا ۰۱۰ و برای $a = ۷$ باید سه رقم آخر ۰۱۰ باشد.
با این توضیحات به ازای $a = ۵$ و $a = ۷$ تعداد اعداد بصورت i و $i + a$ که هر دو عجیب باشند کمتر است و در نتیجه در مجموع اعداد عجیب بیشتری تولید می‌کنند. ولی از این میان یکی از اعداد به شکل $i + ۷$ خارج از محدوده‌ی مسئله (یعنی کمتر مساوی ۲۴۹) می‌شود که $۲۵۰ = ۷ + ۲۴۳$ است. در نتیجه در مجموع تعداد اعداد عجیب ساخته شده به ازای $a = ۵$ بیشتر از بقیه‌ی گزینه‌ها است. □

۱۵ فرض کنید گزینه‌های زیر اسکناس‌های ۵ کشور مختلف باشند. کدام گزینه مربوط به یک کشور افسانه‌ای نیست؟

۱) $۱!, ۲!, ۳!, \ldots$
۲) $۱, ۲, ۴, ۸, \ldots$
۳) $۱, ۲, ۳, ۵, ۹, \ldots$ (۱ و $(۲^n + ۱)$ها)
۴) $۱, ۴, ۹, ۱۶, \ldots$
۵) گزینه‌های ۳ و ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در صورتی که در یک کشور هر سکه از مجموع سکه‌های کوچکتر از آن بزرگتر باشد الگوریتم یاد شده درست است (چرا؟). در نتیجه گزینه‌های اول و دوم هر دو افسانه‌ای هستند. برای گزینه‌ی چهارم به ازای $n = ۱۸$ الگوریتم بهینه نیست و در نتیجه کشور افسانه‌ای نخواهد بود.
ولی گزینه‌ی سوم هم کشوری افسانه‌ای است. فرض کنید چنین نباشد، در این صورت به ازای nای روش ما تعداد سکه‌ی بیشتری انتخاب می‌کند. فرض کنید در انتخاب بهینه بزرگترین عدد انتخاب نشود. در این صورت باید از یکی از اعداد دیگر چند بار انتخاب شود. ولی می‌دانیم بجای انتخاب دو عدد یکسان، می‌توان سکه‌ی بزرگترش را به همراه عدد ۱ انتخاب کرد. در نتیجه با انتخاب بزرگترین عدد نیز می‌توان با همان تعداد سکه به جواب بهینه رسید. پس این گزینه هم کشوری افسانه‌ای است. □

گراف ساده‌ی n رأسی G با رئوس $۱, ۲, \ldots, n$ را در نظر بگیرید. **ماتریس مسیریاب گراف**، یک ماتریس $n \times n$ است که درایه‌ی سطر iام و ستون jام آن، تعداد مسیرهای بین رأس i و رأس j است (مسیر دنباله‌ای از رئوس است که بین هر دو رأس متوالی یک یال وجود دارد و هر رأس حداکثر یک بار آمده است).
در صورتی که $i = j$ باشد، مقدار ۱ را در ماتریس قرار می‌دهیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ کدام یک از ماتریس‌های زیر، می‌تواند یک ماتریس مسیریاب باشد؟

ماتریس ۱:

۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۲	۱
۱	۱	۱	۱	۱
۲	۲	۱	۱	۱
۱	۱	۱	۱	۱

ماتریس ۲:

۱	۳	۳	۳	۳
۳	۱	۳	۳	۳
۳	۳	۱	۳	۳
۳	۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۳	۱

ماتریس ۳:

۱	۱	۲	۱
۱	۱	۲	۲
۲	۲	۱	۲
۱	۲	۲	۱

ماتریس ۴:

۱	۴	۳	۳
۴	۱	۳	۳
۳	۳	۱	۳
۳	۳	۳	۱

ماتریس ۵:

۱	۳	۳	۲
۳	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۳
۲	۳	۳	۱

۱) ماتریس ۲   ۲) ماتریس ۳   ۳) ماتریس ۴   ۴) ماتریس ۱   ۵) ماتریس ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ماتریس مسیریاب یک درخت، ماتریسی با درایه‌های ۱ است. اضافه کردن یک یال باعث می‌شود دوری بوجود آید که حداقل شامل سه راس است و تعداد مسیرهای بین آنها ۲ خواهد شد. در نتیجه ماتریس ۱ نمی‌تواند ماتریس مسیریاب یک گراف باشد. به همین استدلال ماتریس ۳ نیز باید یک دور سه تایی با یک راس متصل به آنها باشد که در این حالت هم ماتریس گراف برابر ماتریس ۳ نمی‌شود.
در صورتی که در یک مولفه‌ی گراف دو دور داشته باشیم دو راس خواهیم داشت که تعداد مسیرهای بین آنها حداقل ۴ تا باشد در نتیجه ماتریس ۲ و ۵ هم قابل دست‌یابی نیست. با بررسی گراف‌های چهار راسی می‌توان مثالی برای ماتریس ۴ یافت (گرافی با ۵ یال). □

۱۷ می‌خواهیم با پرسیدن تعدادی از خانه‌های ماتریس مسیریاب یک گراف، تعداد مؤلفه‌های گراف را تشخیص دهیم. در هر گام می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را پرسید. در حداقل چند گام به طور تضمینی به هدف می‌رسیم؟

۱) n ۲) $n - ۱$ ۳) $n - ۲$ ۴) $\binom{n-۱}{۲} + ۱$ ۵) $\binom{n}{۲}$

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

واضح است که با $\binom{n}{۲}$ تعداد یال می‌توان به هدف رسید (هر دو راسی که در یک مولفه باشند درایه‌ی متناظر با آنها بزرگتر از صفر است). ادعا می‌کنیم با کمتر از این تعداد نمی‌توان به هدف رسید.
فرض کنید $\binom{n}{۲} - ۱$ پرسش انجام داده‌ایم و پاسخ تمام آنها صفر باشد. در این صورت گرافی داریم که هیچ یالی ندارد مگر اینکه بین دو راسی که سوال نپرسیده‌ایم یال باشد (که هنوز درباره‌ی آن اطلاعی نداریم). پس در این حالت خاص بدون پرسش آخر نمی‌توان تعداد مولفه‌ها را تشخیص داد. □

۱۸ با استفاده از ماتریس مسیریاب یک گراف، پاسخ چند تا از موارد زیر را همواره می‌توان فهمید؟ (رأس برشی، رأسی است که پس از حذف آن تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف افزایش یابد.)

- آیا گراف رأس برشی دارد؟
- آیا رأس v برشی است؟
- بین دو رأس v و u یال وجود دارد یا نه؟
- آیا گراف حداقل ۲ (نه لزوما مجزا) دور دارد؟

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۰ ۴) ۲ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

سوال اول: می‌توان فهمید. اگر راس برشی در گرافی باشد، آن راس و همسایگانش تنها یک مسیر به یکدیگر دارند. پس در این حالت حداقل سه راس هستند که درایه‌ی متناظرشان ۱ است. از طرفی اگر چنین سه راسی وجود داشته باشند بدین معنی است که یکی از آنها بین دو راس دیگر است (در غیر این صورت تعداد مسیرهای بین این دو راس حداقل ۲ بود). حال پس از حذف راس میانی دو راس دیگر در دو مولفه جدا قرار می‌گیرند.
سوال دوم و سوم: نمی‌توان فهمید. یک درخت را در نظر بگیرید. در این حالت متریس مسیریاب آن تماما ۱ است. در یک درخت برگ‌ها برشی نیستند ولی بقیه‌ی رئوس برشی هستند. از طرفی در این درخت نمی‌توان فهمید که بین دو راس مشخص یال هست یا نه.
سوال چهارم: می‌توان فهمید. ابتدا مولفه‌ها را از روی ماتریس می‌یابیم. حال اگر در یک ماتریس مسیریاب هر مولفه تنها ۱ وجود داشت دور ندارد، اگر تنها شامل ۱ و ۲ بود یک دور وجود دارد ولی اگر شامل اعداد ۳ یا بیشتر بود حداقل دو دور وجود دارد. □

روال جام حذفی بدین صورت است که ۲^n تیم در n مرحله با هم مسابقه می‌دهند به نحوی که در هر مرحله هر تیم با یک تیم دیگر مسابقه می‌دهد (مثلا در مرحله‌ی اول $۲^{n-۱}$ مسابقه انجام می‌شود) و تیم‌هایی که شکست بخورند حذف می‌شوند. تیم‌های پیروز شده (نیمه‌ی دیگر تیم‌ها) به مرحله‌ی بعد می‌روند و دوباره به همین ترتیب مسابقه می‌دهند تا جایی که فقط یک تیم باقی بماند که تیم قهرمان نامیده می‌شود.
هر تیم عددی بین ۰ تا $۲^n - ۱$ دارد که قدرت آن تیم را نیز نشان می‌دهد (قدرت هیچ دو تیمی با هم برابر نیست). در مسابقه‌ی بین دو تیم، تیمی پیروز خواهد شد که قدرت بیشتری داشته باشد مگر در شرایطی که هر سوال مشخص می‌کند.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ این مسابقات با شرکت ۶۴ تیم برگزار می‌شود ($n = ۶$). در یک مسابقه اگر قدرت دو تیم را در مبنای دو بنویسیم و همه‌ی رقم‌های آنها به جز یکی برابر باشند هر دو تیم ممکن است پیروز شوند، در غیر این صورت تیم قوی‌تر پیروز می‌شود. برای مثال اگر ۲ و ۱۰ با هم مسابقه بدهند، هر دو تیم می‌توانند پیروز شوند. اما اگر ۱۶ و ۷ با هم مسابقه بدهند، حتما ۱۶ پیروز خواهد شد. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳۱ ۲) ۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

تمامی تیم‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ قرار دهید و مسابقات را با این چینش انجام دهید. در این صورت هر تیم با شماره‌ی زوج با تیم حریفش تنها در رقم یکان متفاوت است. پس تیم‌های زوج می‌توانند برنده باشند. بدین ترتیب به حالتی می‌رسیم که تمام اعداد زوج صعود کرده‌اند. همین روند را برای ۳۲ بعدی انجام دهید (رقم یکان همه صفر است و می‌توان همه‌ی اعداد را بر ۲ تقسیم کرد تا به اعداد ۱ تا ۳۱ برسیم. به ازای این اعداد هم همین روال را انجام دهید. با تکرار این کار در مراحل بعدی می‌توان به حالتی رسید که تیم با قدرت صفر برنده‌ی مسابقات شود. □

۲۰ در یک جام حذفی ۳۲ تیم حضور دارند ($n = ۵$) و چهار تیم ۳۱، ۲۳، ۱۴ و ۵ آمادگی کافی ندارند و ممکن است در یک مسابقه به طور اتفاقی شکست بخورند. با این شرایط ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

می‌دانیم تیم قهرمان باید ۵ بازی را ببرد و در شرایط سوال، ۴ تیم گفته شده است که ممکن است در شرایطی از تیمی ضعیف‌تر شکست بخورند. پس تیم ۰ نمی‌تواند قهرمان شود.
حال می‌خواهیم ساختاری ارائه دهیم که طی آن تیم ۱ قهرمان شود. تیم ۱ به ترتیب با تیم‌های ۰ و ۵ و ۱۴ و ۲۳ و ۳۱ بازی کند و در ۴ مسابقه‌ی آخر تیم حریف به طور اتفاقی شکست می‌خورند.
تیم ۵ با تیم‌های ۲ و ۱ و تیم ۱۴ با تیم‌های ۶ و ۴ و ۱ و تیم ۲۳ با تیم‌های ۱۳ و ۱۲ و ۱۰ و ۱ و تیم ۳۱ با تیم‌های ۳۰ و ۲۹ و ۲۷ و ۲۲ و ۱ بازی خواهند کرد و طی این ساختار تیم ۱ قهرمان می‌شود. □

۲۱ در یک جام حذفی ۱۶ تیم حضور دارند ($n = ۴$) و هر تیم ممکن است به طور اتفاقی در یک مسابقه پیروز شود. ضعیف‌ترین تیمی که ممکن است قهرمان شود چه تیمی است؟

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

ابتدا اثبات می‌کنیم تیم ۳ نمی‌تواند قهرمان شود. چون هر تیم برای قهرمانی باید ۴ بازی را ببرد و اگر فرض کنیم تیم ۳ قهرمان شده است باید حتما با هر سه تیم ضعیف‌تر از خودش بازی کند زیرا یک بازی را فقط می‌تواند از تیم قوی‌تری پیروز شود، پس در یکی از بازی‌های فینال یا نیمه نهایی باید تیم ۳ از تیمی ضعیف‌تر از خود پیروز شود.
یعنی آن تیم حداقل باید ۲ بازی را پیروز شده باشد تا به آن مرحله رسیده باشد که با توجه به اینکه هر ۳ تیم ضعیف‌تر از ۳ از خود ۳ شکست خواهند خورد پس هیچ کدام از این تیم‌ها نمی‌تواند ۲ پیروزی داشته باشد (یک بازی را می‌توانند از تیم قوی‌تر ببرند و تیم ضعیف‌تری نیز وجود ندارد که از آن ببرند) تا به نیمه نهایی برسند پس تیم ۳ نمیتواند قهرمان شود.
حال ساختاری حریصانه برای قهرمانی تیم ۴ ارائه می‌دهیم:
تیم ۴ با تیم‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۱۵ بازی می‌کند و تیم ۱۵ با تیم‌های ۱۴ و ۱۳ و ۱۲ و ۴ بازی می‌کند. تیم ۳ با تیم‌های ۰ و ۷ و ۴ بازی می‌کند و تیم ۲ با تیم‌های ۶ و ۴ بازی می‌کند و همچنین تیم ۱ با تیم ۴ بازی می‌کند.
□

دنباله‌ای اکیدا صعودی مانند $a_۱, a_۲, \dots, a_n$ از اعداد داریم. ما هیچ اطلاعاتی درباره‌ی اعداد نداریم و فقط می‌دانیم اکیدا صعودی هستند. عدد x در این دنباله موجود است اما نمی‌دانیم کجای دنباله است و می‌خواهیم مکان عدد x در دنباله را بیابیم. در هر مرحله می‌توانیم یکی از a_iها را انتخاب کنیم؛ سپس به ما نتیجه‌ی مقایسه‌ی x با a_i گفته می‌شود؛ یعنی یکی از عبارات زیر گزارش داده می‌شود:

$$x < a_i, \quad x = a_i, \quad x > a_i$$

هزینه‌ی مقایسه‌ی عدد a_i با x، برابر w_i است. w_i داده شده است.
می‌خواهیم الگوریتمی ارائه دهیم که مکان عدد x در دنباله را بیابد. کمینه‌ی هزینه‌ای که بتوان به طور تضمینی این کار را انجام داد

$$f(w_۱, w_۲, \dots, w_n)$$

می‌نامیم. برای مثال می‌توان نشان داد اگرتمام w_iها برابر ۱ باشند، این مقدار برابر $\lfloor \lg(n) \rfloor$ خواهد شد (منظور از $\lg(n)$، لگاریتم n در مبنای ۲ است).

با توجه به توضیحات بالا به ۴ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۲ مقدار

$$f(\underbrace{۲, ۳, ..., ۱۰, ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰, ..., ۱, ۲, ۳, ..., ۱۰}_{\text{۳۱۹ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۶ ۳) ۲۰ ۴) ۱۹ ۵) ۱۶

پاسخ: بهترین این است که با کمترین هزینه تعداد کل حالات را نصف کنیم. ۳۱ عدد ۱ وجود دارد که پس از ۵ بار پرسش اگر عدد مورد نظر یافت نشود یک بازه از اعداد ۲ تا ۱۰ می‌ماند. اگر بازه‌ای شامل اعداد ۸ و ۹ و ۱۰ باشد حداقل ۹ واحد هزینه لازم است تا عدد را تشخیص دهیم. در نتیجه برای یافتن این بازه بصورت حداقلی عدد ۷ انتخاب می‌شود (در غیر اینصورت بازه به ۷ تا ۱۰ می‌رسد که باز هم حداقل ۱۶ واحد هزینه لازم دارد). در نتیجه در مجموع ۱۶ واحد هزینه لازم است. با انتخاب اولیه‌ی عدد ۷ این اتفاق می‌افتد و با هزینه‌ی حداکثر ۱۶ واحد به جواب می‌رسیم (بازه ۱ تا ۶ با ۸ واحد هزینه حل می‌شود). در نتیجه جواب نهایی مسئله برابر ۲۱ است. □

۲۳ مقدار

$$f(\underbrace{۱, ۱, ..., ۱}_{\text{۵۱۱ عدد}}, \underbrace{۲, ۲, ..., ۲}_{\text{۵۱۱ عدد}})$$

چند است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۹ ۳) ۲۷ ۴) ۱۲ ۵) ۱۸

پاسخ: فرض کنید بازه تنها شامل ۵۱۱ عدد ۲ باشد. طبق مسئله‌ی کلاسیک این مبحث می‌دانیم حداقل باید ۸ پرسش انجام شود و اگر تعداد این اعداد یکی هم بیشتر شود (۵۱۲ یا بیشتر)، ۹ پرسش لازم است. حال عدد اولیه اگر شامل عددی بجز عدد ۲ وسطی باشد همچنان ۸ پرسش دیگر لازم است و اگر همان ۲ وسطی باشد ۵۱۱ عدد یک در سمت چپ وجود دارند که می‌توانند جواب مسئله باشند. در نتیجه حداقل ۱۷ واحد هزینه لازم است. از طرفی اگر سمت راست‌ترین ۱ را انتخاب کنیم با ۱۷ واحد هزینه می‌توانیم به خواسته‌ی خود برسیم. □

۲۴ فرض کنید $n \geqslant ۴$ باشد. مقدار

$$f(n, n^۲, n^۳, ..., n^n)$$

چند است؟

۱) $n^{n-۳} + n^{n-۱}$
۲) $\left\lfloor n^{\frac{n}{۲}} + n^{\frac{۳n}{۴}} + n^{\frac{۷n}{۸}} + ... \right\rfloor$
۳) $\sum_{۱\leqslant ۲k+۱\leqslant n} n^{۲k+۱}$
۴) $\lfloor \lg(۱ + n + n^۲ + ... + n^n) \rfloor$
۵) $n + n^۲ + ... + n^{n-۱}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

پاسخ این سوال شبیه به سوال اول این بخش است. فرض کنید تنها چهار عدد بزرگ‌تر مانده باشند. در این صورت تعداد حالات مختلف پرسش محدود هستند و می‌توان به سادگی بدست آورد که $n^{n-1} + n^{n-3}$ واحد هزینه لازم است. از طرفی مجموع بقیه‌ی اعداد بازه کمتر از n^{n-1} است. در نتیجه این هزینه برای کل بازه هم درست است. □

۲۵ فرض کنید $n \geqslant 3$ و تمام w_iها متمایز هستند. چند تا از گزاره‌های زیر همواره درست هستند؟

- هیچ الگوریتم بهینه‌ای در مرحله‌ی اول w_i بیشینه را انتخاب نمی‌کند.
- الگوریتم بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_iای را انتخاب می‌کند که $|\sum_{j<i} w_j - \sum_{j>i} w_j|$ کم‌ترین مقدار ممکن را داشته باشد.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در هیچ مرحله‌ای، a_1 را انتخاب نکند.
- جواب بهینه‌ای وجود دارد که در مرحله‌ی اول، w_i کمینه را انتخاب کند.

۱) ۱ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۰ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هیچ‌کدام از گزاره‌ها درست نیستند.
گزاره‌ی ۱: اگر وزن‌ها به ترتیب ۱ و ۳ و ۲ باشد، بهترین انتخاب این است که ابتدا عدد وسطی را انتخاب کنیم که بیشینه وزن را دارد.
گزاره‌ی ۲: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است.
گزاره‌ی ۳: اگر در مثال سوال قبل، تنها چهار عدد بزرگ‌تر را در نظر بگیریم در سوال اول بهتر است که عدد اول انتخاب شود.
گزاره‌ی ۴: مثال سوال قبل، مثال نقضی برای این گزاره است. □