- سؤال‌های **۱۶ تا ۲۵** در دسته‌های چندسؤالی آمده‌اند و توضیح هر دسته پیش از آن آمده است.
- امتیاز همه‌ی سؤال‌ها یکسان است.
- جواب درست به هر سؤال چهار نمره‌ی مثبت و جواب نادرست یک نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها در هر سؤال به شکل تصادفی است.

۱ در جزیره‌ای ۱۰۰ نفر زندگی می‌کنند. هر نفر یا سفیدپوست است، یا سیاه‌پوست و یا سرخ‌پوست (دقیقن یکی از این سه حالت). نوع یک جزیره به شکل زیر تعیین می‌شود:

- اگر حداقل ۹۰ سفیدپوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سفید» است.
- اگر حداقل ۸۰ سیاه‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سیاه» است.
- اگر حداقل ۷۰ سرخ‌پوست در جزیره باشند، نوع جزیره «سرخ» است.

می‌دانیم جزیره دقیقن یکی از سه نوع سفید، سیاه و سرخ است. ما به جزیره رفته‌ایم. حداقل چند نفر از افراد جزیره را باید ببینیم تا بتوانیم نوع جزیره را تشخیص دهیم؟

۱) ۵۱ ۲) ۲۱ ۳) ۶۱ ۴) ۸۱ ۵) ۴۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر تنها ۵۰ نفر را ببینیم و آنها ۳۰ نفر سیاه‌پوست و ۲۰ سرخ‌پوست باشند هنوز نوع جزیره مشخص نیست (فقط مشخص است که جزیره، سفید نیست.
اگر حداقل ۵۱ نفر را ببینیم، در صورتی که بیش از ۲۰ نفر سرخ‌پوست باشند جزیره حتما سرخ است. در غیر این صورت حداقل ۳۱ نفر سفیدپوست یا سیاه‌پوست هستند و در نتیجه جزیره سرخ نیست. در این بین اگر بیش از ۱۰ نفر سیاه‌پوست باشند جزیره سیاه خواهد بود و در غیر این صورت جزیره سفید است. □

۲ یک جایگشت نزولی از اعداد ۱ تا n داریم. در هر گام دو عدد متمایز به صورت تصادفی انتخاب شده و به احتمال $\frac{۱}{۲}$ جای آنها عوض می‌شود. اگر پس از چند گام این جایگشت مرتّب شود (یعنی اعداد به ترتیب صعودی در جایگشت قرار بگیرند)، علیرضا می‌برد و در غیر این صورت سپهر برنده‌ی بازی است (تعداد گام‌ها محدودیتی ندارد). به چه احتمالی علیرضا برنده می‌شود؟

۱) ۰ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{n}$ ۴) $\frac{۱}{n!}$ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

به ازای یک جایگشت اولیه، یک دنباله از جابجایی‌ها که جایگشت را مرتب می‌کند در نظر بگیرید.
احتمال وقوع این دنباله بیشتر از

$$(۱/N^۲ \times ۱/۲)^{(N^۲)}$$

است. پس احتمال اینکه در یک

$$N^۲$$

متوالی این جایگشت مرتّب نشود حداکثر برابر است با

$$۱ - (۱/N^۲ \times ۱/۲)^{(N^۲)}$$

پس احتمال اینکه پس از t مرحله ی

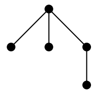
$$N^۲$$

تایی از جابجایی ها مرتب نشده باشد حداکثر برابر است با:

$$(۱ - (۱/N^{۲} \times ۱/۲)^{(N^{۲})})^{t}$$

که با میل کردن t به بینهایت این مقدار نیز به صفر میل می‌کند. پس احتمال مرتب‌شدن جایگشت در نهایت برابر ۱ است و علیرضا به احتمال ۱ برنده می‌شود. □

۳ یک گراف ساده‌ی ۱۰۰ رأسی داریم که زیرگراف به شکل زیر ندارد:



توجه کنید منظور از زیرگراف لزومن القایی نیست. حداکثر تعداد یال‌های این گراف چیست؟ (زیرگراف القایی زیرگرافی است که انتخاب رأس‌ها در آن اختیاری است ولی بین دو رأس از زیرگراف یال وجود دارد اگر و تنها اگر در گراف اصلی بین آنها یال وجود داشته باشد)

۱) ۱۵۰   ۲) ۱۰۰   ۳) ۱۸۰   ۴) ۲۰۰   ۵) ۱۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در یک مؤلفه دقت می‌کنیم:

- ابتدا فرض کنید u یک رأس با درجه‌ی حداقل ۴ باشد. هم‌سایه‌های u نمی‌توانند به کسی جز u وصل باشند. پس در مؤلفه‌ی شامل رأس u نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها کم‌تر از ۱ است.
- فرض کنید u یک رأس با درجه‌ی ۳ باشد. هم‌سایه‌های u نمی‌توانند به کسی جز u و هم‌سایه‌های‌ش وصل شوند. پس مؤلفه‌ی شامل u حداکثر ۴ رأس و ۶ یال دارد و نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در آن حداکثر $\frac{۳}{۲}$ است.
- حال مؤلفه‌ای در نظر بگیرید که درجه‌ی رئوس آن حداکثر ۲ است. چنین مؤلفه‌ای باید یک دور یا یک مسیر باشد که نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌ها در آن حداکثر ۱ است.

پس با توجه به حالات بالا نسبت تعداد یال‌ها به تعداد رأس‌های گراف حداکثر $\frac{۳}{۲}$ است و پاسخ حداکثر برابر ۱۵۰ است. از طرفی گرافی متشکل از ۲۵ نمونه‌ی $K_۴$ در نظر بگیرید. این گراف خاصیت مسئله را دارد و ۱۰۰ـ رأسی و ۱۵۰ یالی است. پس پاسخ برابر ۱۵۰ است. □

۴ به جایگشت $p_۱, p_۲, ..., p_n$ از اعداد ۱ تا n زیبا گوییم هرگاه به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant n - ۱$ داشته باشیم: $p_i \leqslant p_{i+۱} + ۳$. به ازای $n = ۹$، باقی‌مانده‌ی تقسیم تعداد جایگشت‌های زیبا بر ۵ چند است؟

۱) ۳   ۲) ۰   ۳) ۱   ۴) ۲   ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

به ازای $n = ۴$ تمام ۲۴ جایگشت ممکن زیبا هستند. حال به ازای $n \geqslant ۵$ با استفاده از تناظر، از هر جایگشت زیبای $n - ۱$ تایی، ۴ جایگشت زیبا و متمایز n تایی می سازیم. کافی است تا عدد n را در جایگشت دلخواهی به طول $n - ۱$ درج کنیم. عدد n میتواند در انتهای جایگشت مذکور و یا پیش از اعداد $n - ۱$، $n - ۲$ و یا $n - ۳$ قرار داده شود پس ۴ مکان برای درج آن داریم. از طرفی به ازای هر جایگشت دلخواه $n - ۱$ تایی، با حذف n از

دقیقا ۴ جایگشت n تایی به آن جایگشت میرسیم. پس اگر $f(n)$ را تعداد جایگشت های زیبای n تایی تعریف کنیم، داریم:

$$f(۴) = ۲۴$$

و برای $n \geqslant ۵$:

$$f(n) = ۴f(n-۱)$$

پس $f(۹)$ برابر $۴^۵ \times ۲۴$ است که به پیمانه ۵ برابر ۱ می شود.

□

۵ به گراف ۱۶ رأسی G گراف **فرد زده** گوییم، اگر هر رأس آن هم در دوری به طول ۳ و هم در دوری به طول ۵ و ... و هم در دوری به طول ۱۵ باشد. حال فرض کنید یک گراف دوبخشی کامل داریم که هر بخش آن ۸ رأس دارد. می‌خواهیم تعدادی یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود. حداقل چند یال باید اضافه کنیم؟

۱) ۸ ۲) ۲۸ ۳) ۲ ۴) ۱۶ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

برای اینکه همه‌ی رئوس یک بخش در یک مثلث باشند باید حداقل یک یال در بخش دیگر قرار داد (و یا چهار یال در همان بخش قرار دهیم). در نتیجه حداقل ۲ یال لازم است. ولی چون گراف کامل دوبخشی است و از هر راسی به هر راس در بخش مقابل یال وجود دارد، با اضافه کردن این دو یال تمامی دورهای فرد راسی را می‌توان ساخت. □

۶ در سؤال قبل فرض کنید یک گراف ۱۶ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی ۴ رقمی متمایز است. دو رأس در این گراف به هم یال دارند، اگر و تنها اگر رشته‌های متناظر آن رأس‌ها دقیقن در یک رقم تفاوت داشته باشند. حداقل چند یال به این گراف اضافه کنیم تا فرد زده شود؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هر یال اضافه می‌تواند حداکثر دو مثلث ایجاد کند و در نتیجه چهار راس را شامل شود. پس حداقل چهار یال برای لازم است.

از طرفی با اضافه کردن این چهار یال بین $xx۰۰$ و $۱۱xx$ ها گراف فرد زده می‌شود. □

۷ یک جدول $n \times n$ داریم که در هر خانه‌ی آن یکی از دو عدد ۰ و ۱ نوشته شده است. چهار خانه شامل عدد ۰ را که از محل‌های تقاطع دو سطر و دو ستون به دست آیند، **صفرـ مستطیلی** می‌نامیم. هم‌چنین چهار خانه شامل عدد ۱ را که هیچ دو تا از آن‌ها هم‌سطر و هم‌ستون نیستند، **یکـ پراکنده** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفرـ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یکـ پراکنده وجود نداشته باشد.

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۸ ۴) ۴ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

برای $n = ۴$ جدولی در نظر بگیرید که ۳ سطر نخست آن شامل عدد ۱ و سطر آخر آن شامل عدد ۰ باشد. حال کافی است ثابت کنیم هیچ جدول ۵×۵ با خاصیت گفته شده وجود ندارد. بیشینه‌ی تعداد خانه‌های ۱ را که

هیچ دوتا هم‌سطر یا هم‌ستون نیستند، در نظر بگیرید. حداکثر این مقدار برابر ۳ است. پس حداقل ۲ سطر و ۲ ستون باقی می‌ماند که شامل این خانه‌ها نیست و شامل هیچ عدد ۱ نیست (زیرا در غیر این صورت تعداد این خانه‌ها بیش‌تر می‌شود). پس چهار خانه‌ی صفر_ مستطیلی شامل ۰ پیدا می‌شود که تناقض است.

□

۸ همان سؤال قبل را در نظر بگیرید. چهار خانه شامل عدد ۱ را که هم‌سطر باشند، **یک_خطی** می‌نامیم. حداکثر مقدار n را بیابید به طوری که جدولی وجود داشته باشد که در آن هیچ چهار خانه‌ی صفر_ مستطیلی و هیچ چهار خانه‌ی یک_ خطی وجود نداشته باشد؟

۱) ۷ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۸ ۵) ۶

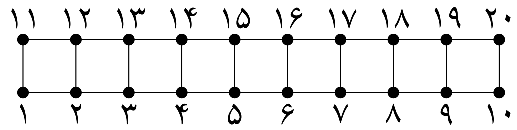
پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای $n = ۵$، جدول زیر را در نظر بگیرید:

۱	۱	۱	۰	۰
۰	۱	۱	۱	۰
۰	۰	۱	۱	۱
۱	۰	۰	۱	۱
۱	۱	۰	۰	۱

حال کافی است ثابت کنیم هیچ جدول ۶×۶ با شرایط گفته شده وجود ندارد. فرض کنید چنین جدولی وجود دارد. هر سطر این جدول حداقل ۳ خانه‌ی صفر دارد. پس حداقل شامل $\binom{۳}{۲}$ جفت خانه‌ی صفر است. پس کل جدول شامل حداقل ۱۸ جفت خانه‌ی صفر هم‌سطر است. تعداد جفت ستون‌های ممکن $۱۵ = \binom{۶}{۲}$ است. پس دو جفت هم‌سطر از خانه‌های صفر وجود دارد که ستون‌های‌شان یک‌سان باشد. این چهار خانه یک چهار خانه‌ی صفر_ مستطیلی است که تناقض است و حکم ثابت می‌شود. □

۹ گراف ۲۰ رأسی زیر با رأس‌های $۱, ۲, \ldots, ۲۰$ را در نظر بگیرید. به چند طریق می‌توان از این گراف تعدادی یال حذف کرد به طوری که گراف هم‌بند بماند؟ توجه کنید یک حالت این است که هیچ یالی حذف نکنیم.



۱) ۲۰۷۳۹۱ ۲) ۹۴۶۰۲۵ ۳) ۲×۴^{۱۰} ۴) ۸۳۴۲۶۱ ۵) ۷۳۸۶۳۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

a_n را تعداد حالات خواسته شده برای یک گراف $۲n$_رأسی در نظر می‌گیریم. b_n را نیز مانند a_n تعریف می‌کنیم؛ با این تفاوت که از قبل بدانیم بین دو رأس سمت چپ مسیری وجود داشته است. داریم:

$$a_n = ۳a_{n-۱} + b_{n-۱}$$

و

$$b_n = ۴a_{n-۱} + ۲b_{n-۱}$$

از روابط بازگشتی بالا مقدار $a_{۱۰}$ که پاسخ مسئله است به دست می‌آید. □

۱۰ علیرضا در صفحه‌ی مختصات قرار دارد. او در هر حرکت می‌تواند از نقطه‌ی با مختصات صحیح (a, b) به یکی از نقاط $(۱۰۲۴ \,\%\, (۲a), b)$ و یا $(a, (۱۰۲۴ \,\%\, (۲b))$ برود که در آن‌ها منظور از $x \,\%\, y$ باقی‌مانده‌ی تقسیم x بر y است. علیرضا یک نقطه‌ی (x, y) برای شروع انتخاب می‌کند که $۰ \leqslant x \leqslant ۵۰, ۰ \leqslant y \leqslant ۱۰۰$ باشد. اگر

(u,v) نقطه‌ای با بیش‌ترین مجموع مختصه‌ها ($u+v$ بیشینه) در بین تمامی نقاط قابل رسیدن با حرکات بالا باشد، باقی‌مانده تقسیم $u+v$ بر ۵ چند است؟

۱) ۴ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۳ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

در هر گام مولفه‌ی مورد تغییر مقدارش در نمایش مبنای دو یک واحد به سمت چپ شیفت پیدا می‌کند. پس بیش‌ترین x قابل دسترسی به ازای مقدار اولیه‌ی ۶۳ است. به همین ترتیب برای y ها ۳۱ است. لذا نقطه‌ی (u,v) برابر (۱۰۰۸،۹۹۲) است. لذا جواب برابر ۰ است. □

۱۱ دو مجموعه‌ی ناتهی A و B نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر هر عضو مجموعه‌ی A نسبت به هر عضو مجموعه‌ی B اول باشد (دو عدد نسبت به هم اول‌اند اگر و تنها اگر ب.م.م شان یک باشد). فرشید و فرشاد هر کدام یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از $\{۱,۲,...,۹\}$ انتخاب می‌کنند. احتمال این که مجموعه‌های فرشید و فرشاد نسبت به هم اول باشند چقدر است؟

۱) $\frac{۷۲۳}{۳۷۳۰۳}$ ۲) $\frac{۵۰۶۱}{۲۵۵\times ۲^{۱۰}}$ ۳) $\frac{۶۰۸۴}{۱+۲۵۵\times ۲^{۱۰}}$ ۴) $\frac{۲۵۳۰}{۲۵۵\times ۲^{۹}}$ ۵) $\frac{۵۰۶۰}{۱+۲۵۵\times ۲^{۱۰}}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

عدد ۱ می‌تواند در هر دو مجموعه باشد (۴ حالت). هر کدام از اعداد ۵ و ۷ می‌توانند حداکثر در یک مجموعه باشند (هر کدام ۳ حالت دارند).
اعداد ۲ و ۴ و ۸ حداکثر در یک مجموعه می‌توانند عضو باشند. در نتیجه ۱۵ حالت دارند.
اعداد ۳ و ۹ حداکثر در یک مجموعه می‌توانند عضو باشند. در نتیجه ۷ حالت دارند.
عدد ۶ تنها در حالتی می‌تواند در مجموعه‌ای عضو باشد که توان‌های ۲ و ۳ در دو مجموعه‌ی مختلف نباشند (در ۴۲ حالت در دو مجموعه‌ی مختلف هستند). در یک حالت (حالتی که توان‌های ۲ و ۳ عضو نباشند) نیز ۳ انتخاب برای عدد ۶ داریم.
در نتیجه برای انتخاب مضارب ۲ و ۳، $۱۶۹ = ۳ \times ۱ + ۶۲ \times ۲ + ۴۲$ روش وجود دارد.
در نتیجه مجموعا تعداد حالات ممکن ۶۰۸۴ می‌شود. ولی حالاتی که یکی از این مجموعه‌ها یا هر دو تهی باشند را باید حذف کنیم که تعداد آنها $۱۰۲۳ = ۱ + ۵۱۱ + ۵۱۱$ تاست. در نتیجه ۵۰۶۱ حالت مختلف داریم که پس از تقسیم کردن بر کل حالات و ساده‌سازی به جواب $\frac{۷۲۳}{۳۷۳۰۳}$ می‌رسیم. □

۱۲ ده توپ با شماره‌های ۱ تا ۱۰ به ترتیب دور یک دایره قرار دارند. در هر مرحله می‌توان دو توپ مجاور مانند A و B در نظر گرفت و آن‌ها را به همان ترتیب در میان دو توپ مجاور دیگر قرار داد. برای مثال با برداشتن توپ‌های ۱ و ۳ و گذاشتن آن‌ها در میان دو توپ ۵ و ۷ می‌توان از شکل سمت چپ به شکل سمت راست رسید:

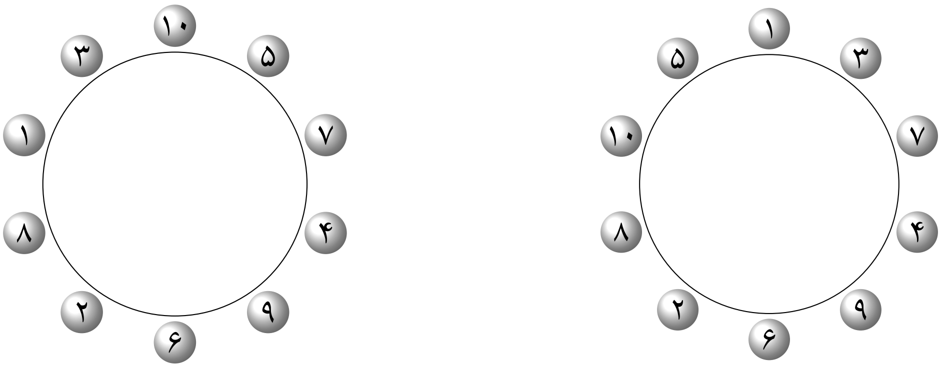
از میان !۹ جایگشت دوری که این توپ‌ها دارند، به چند جایگشت می‌توان رسید؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{۹!}{۲}$ ۲) $۸!$ ۳) $\frac{۹!}{۶}$ ۴) $۹!$ ۵) $۹! - ۸!$

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

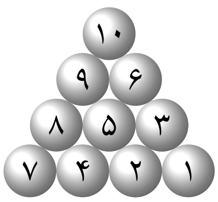
ادعا می‌کنیم به هر جایگشتی می‌توان رسید. کافی است ثابت کنیم دو عنصر مجاور را با تعدادی گام می‌توان جابه‌جا کرد؛ طوری که ترتیب بقیه به هم نریزد. فرض کنید a,b,c سه عنصر متوالی باشند. با انجام گام‌های زیر می‌توان a را دو واحد جلو برد:

$$a,b,c \rightarrow c,a,b \rightarrow b,c,a$$

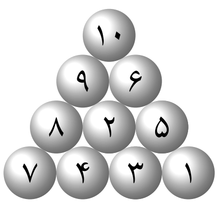


حال فرض کنید a, b دو عنصر مجاور باشند. b را ۴ بار دو واحد به جلو ببرید. به پشت a می‌رسد و عملن a, b جابه‌جا شده و حکم اثبات می‌شود. □

۱۳ در سؤال قبل فرض کنید ۱۰ توپ در آرایشی به شکل زیر قرار گرفته‌اند:



در هر مرحله می‌توان سه توپ را که دوبه‌دو بر یک‌دیگر مماس هستند، انتخاب کرد و مثلث آن‌ها را یک واحد در جهت ساعت‌گرد چرخاند. برای مثال با اعمال این حرکت روی توپ‌های ۲، ۳ و ۵ در شکل بالا به شکل زیر می‌رسیم:



از حالت اولیه به چند آرایش متفاوت از !۱۰ آرایش ممکن برای توپ‌ها می‌توانیم برسیم؟ (تعداد گام‌ها اهمیتی ندارد.)

۱) $\frac{10!}{2}$ ۲) $\frac{10!}{3}$ ۳) $9!$ ۴) $10!$ ۵) $\frac{10!}{6}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر این توپ‌ها را به شکل یک جایگشت خطی ببینیم که در ابتدا مرتب‌شده نیز هستند، تعداد وارونگی‌های جایگشت زوج می‌ماند. پس به حداکثر نصف جایگشت‌ها می‌توانیم برسیم. رسیدن به نصف جایگشت‌ها نیز ممکن است. □

۱۴ در ابتدا عدد $x = 0$ را داریم. در هر مرحله می‌توانیم عدد x را به یکی از دو عدد $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor$ یا $4x + 2$ تبدیل کنیم. با استفاده از این حرکات چه تعداد از اعضای مجموعه $A = \{77, 511, 210, 170, 238\}$ را می‌توان ساخت؟

۱) ۳ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تنها اعداد ۵۱۱، ۱۷۰ و ۲۳۸ قابل تولید هستند.
این ماشین اعدادی را تولید می‌کند که در نمایش مبنای ۲ شان هیچ‌گاه دو رقم ۰ متوالی نداشته باشند. برای اثبات این موضوع کافی است تا نمایش مبنای ۲ ورودی‌ها و خروجی‌های ماشین را در نظر گرفته و روی تعداد بیت‌های عدد x استقرا بزنیم. پس کافی است تا نمایش مبنای ۲ اعضای مجموعه A را در نظر گرفته و پاسخ را بیابیم.
□

۱۵ اعداد ۱ تا ۱۳۹۵ را دور دایره‌ای نوشته‌ایم. دستگاه پاک‌کننده‌ای داریم که ابتدا روی عدد ۱ قرار دارد. در هر مرحله با فرض این که دستگاه روی i اُمین عدد قرار دارد یکی از دو عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

- عدد $i+۱$ اُمی را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i+۲$ اُم می‌گذاریم.
- اعداد $i+۱$ اُم و $i+۲$ اُم را پاک می‌کنیم و دستگاه را روی عدد $i+۳$ اُم می‌گذاریم.

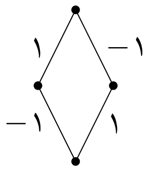
آن‌قدر این اعمال را انجام می‌دهیم تا تنها یک عدد دور دایره باقی بماند (توجه کنید اگر دو عدد باقی بماند، باید طبق روش اول یکی از اعداد را پاک کنیم). عدد نهایی که دور دایره باقی می‌ماند، چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۱۳۹۵ ۲) ۶۹۷ ۳) ۱۳۹۳ ۴) ۱۳۹۴ ۵) ۱

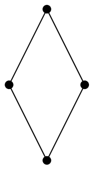
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

بجز عدد ۲ که در اولین مرحله پاک می‌شود، بقیه اعداد را می‌توان نگه داشت. کافی است که ۲ یا ۳ گام قبل از آن اعداد را طوری پاک کنیم که در گام بعدی به خود این عدد برسیم. در این صورت تمامی اعداد را می‌توان به عنوان عدد نهایی باقی گذاشت.
□

فرض کنید G یک گراف باشد که روی هر یال آن یکی از دو عدد ۱ و ۱− نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان یک رأس از گراف در نظر گرفت و عدد تمام یال‌های متصل به آن را قرینه کرد. کمینه‌ی تعداد یال‌های با عدد ۱− را که می‌توان با انجام تعدادی مرحله به آن رسید، $f(G)$ می‌نامیم. برای مثال در گراف زیر مقدار تابع f برابر ۰ است.



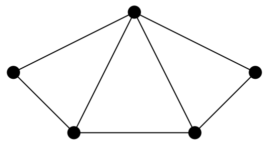
بیشینه‌ی مقدار $f(G)$ را به ازای تمام مقادیر اولیه‌ی ممکن برای یال‌ها، $h(G)$ در نظر می‌گیریم. برای مثال در گراف زیر مقدار h برابر ۱ است:



همان‌طور که در مثال بالا می‌بینید، ورودی تابع f گرافی با یال‌های مقداردهی‌شده و ورودی تابع h گرافی با یال‌های مقداردهی‌نشده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۶ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:

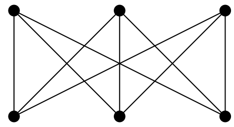


۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

گراف شامل دو دور مجزایال است. هر دور اگر در ابتدا شامل تعداد فردی یال ۱− باشد، هم‌واره تعداد فردی یال ۱− خواهد داشت. پس پاسخ حداقل برابر ۲ است. هم‌چنین می‌توان تمام یال‌های مسیر ۴ـ‌رأسی پایین را ۱ کرد و سپس اگر در یال‌های متصل به رأس بالا بیش از دو یال ۱− وجود داشت، با انتخاب رأس بالا تعداد یال‌های ۱− گراف را حداکثر ۲ کرد. □

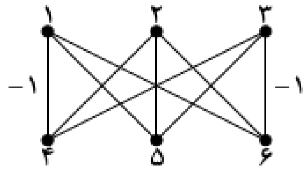
۱۷ مقدار h را برای گراف زیر بیابید:



۱) ۲ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فرض کنید مقداردهی اولیه به شکل زیر باشد (فقط اعداد ۱− نوشته شده است): ادعا می‌کنیم به ازای مقداردهی



بالا مقدار f از ۲ کم‌تر نیست. فرض کنید از ۲ کم‌تر باشد. به مانند استدلال سوال قبل این مقداردهی شامل یک دور با تعداد فردی ۱− است. پس نمی‌تواند مقدار f برابر ۰ باشد. هم‌چنین اگر بخواهد این مقدار برابر ۱ شود باید تنها یال ۱−، یال بین رئوس ۲ و ۵ باشد؛ زیرا هر یک از دورهای ۱, ۲, ۴, ۵ و ۲, ۳, ۵, ۶ شامل حداقل یک یال ۱− خواهند بود. این حالت نیز قابل دست‌یابی نیست؛ زیرا انتخاب شدن و نشدن رأس‌ها یک‌تا تعیین می‌شود و مشاهده می‌کنیم نمی‌توان به این حالت رسید.
از طرفی به ازای هر مقداردهی اولیه می‌توان کاری کرد که حداکثر ۲ یال ۱− داشته باشیم. پس پاسخ برابر ۲ است.

□

۱۸ کدام گزاره‌های زیر درست هستند؟

- الف) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا کم‌تر نیست (به مجموعه‌ای از دورها، دورهای یال‌مجزا می‌گوییم اگر هر یال از گراف در حداکثر یکی از دورهای آن مجموعه آمده باشد).
- ب) مقدار h در هر گراف از بیشینه‌ی تعداد دورهای یال‌مجزا بیش‌تر نیست.
- ج) فرض کنید G یک گراف با یک مقداردهی اولیه باشد که $f(G) = ۰$. اگر G دارای k مؤلفه باشد، دقیقن ۲^k روش وجود دارد که در آن هر رأس انتخاب شود یا نشود و در انتها عدد روی تمام یال‌ها ۱ شوند.

۱) الف و ب ۲) الف و ج ۳) الف ۴) ب و ج ۵) الف و ب و ج

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

گزاره‌ی ب با مثالی که در سوال قبلی آمده متناقض است.
گزاره‌های الف و ج درست هستند.

□

فرض کنید G یک گراف ساده باشد. منظور از فاصله‌ی بین دو رأس در گراف، طول کوتاه‌ترین مسیر بین آن‌هاست. منظور از قطر یک گراف، بیشینه‌ی فاصله‌ی دوبه‌دوی میان رأس‌هاست. توجه کنید در یک گراف ناهم‌بند، قطر

گراف ∞ است. به یک گراف **قطر بحرانی** گوییم، اگر با حذف هر یال از آن، قطر گراف زیاد شود. هم‌چنین به یک گراف **قطر بحرانی معکوس** گوییم، اگر با اضافه کردن یال بین هر دو رأس غیر همسایه، قطر گراف کم شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۱۹ تعداد گراف‌های ۶ رأسی و ۶ یالی را بیابید که قطر بحرانی و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند. (دو گراف را یک‌ریخت می‌نامیم اگر بتوان با نام‌گذاری مجدّد رأس‌های اولی، گرافی برابر با گراف دومی ساخت)

۱) ۶ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

چنین گرافی همبند است و در نتیجه درختی است که یک یال به آن اضافه شده. کافیست که بر اساس اندازه‌ی دوری که در گراف است مسئله را تقسیم کنیم. در این صورت ۳ گراف این ویژگی را خواهند داشت (یکی دور به طول ۶، یکی دور به طول ۵ و دیگری دوری به طول ۳). □

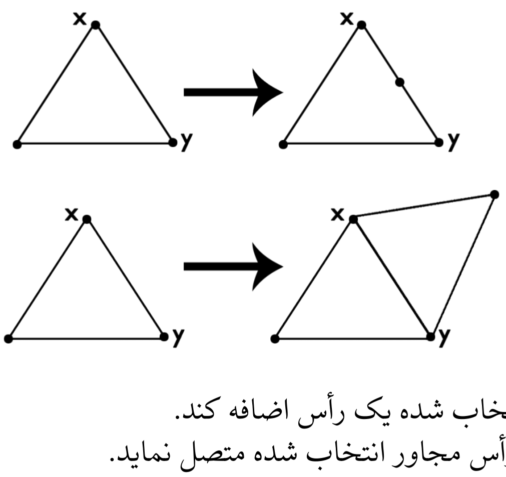
۲۰ تعداد گراف‌های هم‌بندِ غیرکامل ۷ رأسی را بیابید که قطر بحرانی معکوس و دوبه‌دو نایک‌ریخت باشند.

۱) ۹ ۲) ۸ ۳) ۱۱ ۴) ۱۰ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

کافیست که قطر فعلی گراف را در نظر بگیریم. در این صورت اگر راس‌ها را براساس فاصله از دو راس تقسیم‌بندی کنیم، راس‌های هم‌فاصله باید گرافی کامل را تشکیل دهند (در غیر این صورت با اضافه کردن یال قطر گراف کم نخواهد شد) و بین تمامی رئوس دو بخش مجاور یال هست. تنها نکته باقی‌مانده این است که بخش‌های اول و آخر (دو سر قطر) تنها شامل یک راس هستند (در غیر این صورت با اضافه کردن یالی بین یکی از آنها و راسی در فاصله‌ی دو از قطر، قطر گراف افزایش نخواهد یافت).
با این تفاسیر کافیست که تعداد اعضای هر بخش را تعیین کنیم تا گراف بصورت یکتا تعیین شود که با شمارشی ساده عدد ۱۰ بدست می‌آید. □

محسن دست‌گاهی دارد که به عنوان ورودی یک گراف می‌گیرد و در خروجی گرافی دیگر به او می‌دهد!
کارهایی که دست‌گاه او می‌تواند انجام دهد به شرح زیر است:



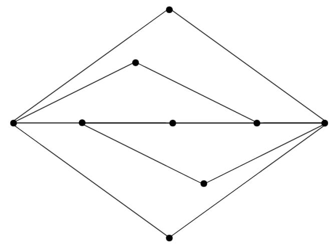
- ببین دو رأس مجاور انتخاب شده یک رأس اضافه کند.
- رأس جدیدی را به دو رأس مجاور انتخاب شده متصل نماید.

محسن یک بازی خطرناک با دستگاه خود شروع می‌کند. به این ترتیب که با یک گراف مثلث ($C_۳$) شروع می‌کند و هر بار گراف خود را به دستگاه می‌دهد و گراف خروجی را برای دور بعد در نظر می‌گیرد و هر موقعی که از بازی خسته شود، گرافش را به عنوان نتیجه‌ی بازی اعلام می‌کند.

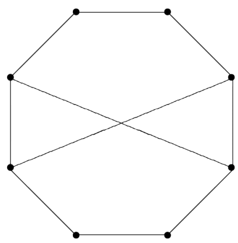
با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۱ کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند نتیجه‌ی بازی محسن با دستگاه خود باشد؟

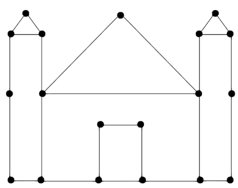
شکل الف)



شکل ب)



شکل ج)



۱) الف ۲) ب و ج ۳) الف و ج ۴) ج ۵) هیچ‌کدام

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

□

۲۲ **عدد هم‌بندی** یک گراف را حداقل تعداد رأس‌هایی در نظر می‌گیریم که باید از آن گراف حذف شود تا آن گراف ناهم‌بند شود. (توجه کنید به طور قراردادی عدد هم‌بندی را برای یک گراف کامل n رأسی برابر $n - ۱$ در نظر می‌گیریم).
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد همبندی چند است؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۵ ۵) تا هر عددی می‌تواند زیاد شود

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

□

۲۳ گراف مسطح به گرافی می‌گوییم که بتوان آن را در صفحه کشید، بدون آن که یال‌هایش یک‌دیگر را قطع کنند. در این وضعیت، صفحه به **ناحیه**‌هایی تقسیم می‌شود. به غیر از ناحیه‌ی نامحدودی که اطراف گراف را در بر می‌گیرد، بقیه‌ی ناحیه‌ها را **محدود** می‌نامند. مثلن گراف شکل الف در سؤال قبل، دارای ۴ ناحیه‌ی محدود است. دو ناحیه با هم مجاورند اگر حداقل در یک یال با هم مرز مشترک داشته باشند.
عدد رنگی سطحی را برای گراف‌های مسطح، حداقل تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ کردن ناحیه‌های محدود گراف تعریف می‌کنیم؛ به طوری که هیچ دو ناحیه‌ی محدود مجاوری هم‌رنگ نباشند.
در بین همه‌ی گراف‌هایی که می‌توانند نتیجه‌ی بازی خطرناک محسن باشند، بیش‌ترین عدد رنگی سطحی چند است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ممکن است گرافی نامسطح نتیجه‌ی این بازی خطرناک باشد ۴) ۵ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

□

اعضای تیم پلیس مخفی سلطان شامل پنج پلیس ماهر با شماره‌های ۱ تا ۵ است. این پنج نفر در آفتاب سوزان بندر دور یک میز گرد نشسته و هر کدام یک عینک آفتابی زده‌اند. عینک‌های آفتابی این افراد، یکی از سه رنگ قرمز، آبی و زرد را دارد. طبیعی است که این افراد، اجسام را به رنگ واقعی نمی‌بینند؛ بلکه ترکیب رنگ آن جسم با رنگ عینک خود را می‌بینند! برای مثال فردی که عینک زرد به چشم زده است، یک جسم آبی را به رنگ سبز و یک جسم زرد را به رنگ زرد می‌بیند. فرض کنید شیوه‌ی ترکیب رنگ اجسام با عینک‌ها مطابق جدول زیر است:

	قرمز	آبی	زرد
قرمز	قرمز	بنفش	نارنجی
آبی	بنفش	آبی	سبز
زرد	نارنجی	سبز	زرد

این قاعده برای عینک‌ها هم صادق است. پس برای مثال اگر پلیس A عینک قرمز و پلیس B عینک زرد داشته باشد، A با نگاه کردن به B تصوّر می‌کند رنگ عینک B نارنجی است!

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۴ سلطان که در کویری دور در حال انجام مأموریتی دیگر است، جویای احوال پلیس‌های خود می‌شود. هر یک از پلیس‌ها در گزارش خود، مجموعه‌ی رنگ‌هایی را که در میان عینک بقیه‌ی پلیس‌ها می‌بیند، می‌گوید. برای مثال فرض کنید پلیس‌ها به ترتیب عینک‌های قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد داشته باشند. پلیس شماره ۲ در پیام خود به سلطان می‌گوید:
«درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من در عینک‌های پلیس‌های دیگر، رنگ‌های قرمز، بنفش و نارنجی را می‌بینم.»
حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید که سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس، قرمز یا زرد یا آبی است. به ازای چند حالت از 3^5 حالت

(برای رنگ عینک پلیس‌ها)، سلطان پس از دریافت گزارش‌ها به طور یک‌تا می‌تواند بفهمد رنگ عینک هر پلیس چیست؟

۱) ۲۱۳ ۲) ۲۴۳ ۳) ۱۸۳ ۴) ۱۵۰ ۵) ۱۵۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اگر در پیام یک پلیس، یک رنگ اصلی (مثلن قرمز) باشد، عینک خود او نیز به همان رنگ است. هم‌چنین اگر دو رنگ غیر اصلی در پیام یک پلیس باشند، رنگ عینک او یک‌تا تعیین می‌شود. پس در هر صورت رنگ یک پلیس از روی پیام‌ش به طور یک‌تا تعیین می‌شود، مگر در حالتی که فقط یک رنگ غیر اصلی در پیام‌ش باشد. در این حالت نیز ۴ پلیس دیگر باید به یک رنگ باشند و او به رنگی دیگر. با تعیین رنگ ۴ پلیس دیگر، رنگ این پلیس نیز مشخص خواهد شد. پس در هر صورت سلطان می‌تواند به هدف‌ش برسد. □

۲۵ در نوع جدید پیام‌رسانی، هر پلیس، یک پلیس دیگر را انتخاب کرده و به سلطان پیام می‌دهد که رنگ عینک آن پلیس را چگونه می‌بیند. برای مثال فرض کنید رنگ عینک پلیس‌ها به ترتیب قرمز، قرمز، آبی، زرد و زرد باشد. پیام‌های پلیس‌ها می‌تواند به شکل زیر باشد:

- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۱ هستم. من عینک پلیس شماره ۵ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۲ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را قرمز می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۳ هستم. من عینک پلیس شماره ۱ را بنفش می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۴ هستم. من عینک پلیس شماره ۲ را نارنجی می‌بینم.»
- «درود بر سلطان بزرگ! پلیس شماره ۵ هستم. من عینک پلیس شماره ۴ را زرد می‌بینم.»

حال سلطان پیام تمام پلیس‌ها را دریافت کرده و می‌خواهد تشخیص دهد اکنون رنگ عینک هر پلیس چیست. توجه کنید سلطان می‌داند رنگ عینک هر پلیس قرمز یا زرد یا آبی است. $۳^۵$ حالت برای رنگ عینک پلیس‌ها و $۴^۵$ حالت برای این داریم که هر پلیس، رنگ عینک چه کسی را بفرستد. از این $۴^۵ \times ۳^۵$ حالت، در چند حالت سلطان به طور یک‌تا نمی‌تواند رنگ عینک پلیس‌ها را تشخیص دهد؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۸۸۴۰ ۳) ۱۳۶۸۰ ۴) ۰ ۵) ۱۷۷۶۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

یک گراف می‌سازیم که رأس‌های آن متناظر با پلیس‌ها باشند و اگر پلیس i عینک پلیس j را به رنگ c اعلام کرده باشد، یک یال جهت‌دار به رنگ c از i به j می‌کشیم.
ابتدا جهت یال‌ها را برمی‌داریم؛ زیرا اگر پلیس i، عینک پلیس j را به رنگ c ببیند، پلیس j نیز عینک پلیس i را به همان رنگ می‌بیند.
یک مؤلفه در این گراف در نظر بگیرید. با مشخص شدن رنگ عینک یکی از رئوس آن، رنگ عینک هم‌سایه‌های آن و به همین ترتیب بقیه‌ی رئوس مؤلفه مشخص خواهد شد. اگر یک یال به رنگی اصلی داشته باشیم، عینک دو سر آن یال به رنگ خود یال است. اگر هم دو یال با رأس مشترک داشته باشیم که دو رنگ غیر اصلی متفاوت را داشته باشند، رنگ عینک رأس مشترک‌شان مشخص خواهد شد. پس تنها حالتی که رنگ عینک‌ها مشخص نمی‌شود، حالتی است که مؤلفه‌ای داشته باشیم که رأس‌های‌ش شامل دو رنگ اصلی باشند و هر یال شامل یک رأس از هر یک از این دو رنگ باشد. از طرفی هر مؤلفه‌ی kـ رأسی این گراف شامل k یال است و دقیقن یک دور دارد. این دور نمی‌تواند به طول فرد باشد. پس تنها می‌تواند به طول ۲ یا ۴ باشد که با حالت‌بندی، پاسخ به دست می‌آید. □