- زمان آزمون ۱۸۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۲۳ تا ۳۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ سلطان، ایلیچ و دو مسافر دیگر می‌خواهند سوار یک تاکسی شوند. سلطان با ایلیچ قهر کرده و نمی‌خواهد کنار او بنشیند. این چهار مسافر به چند طریق می‌توانند در صندلی‌های تاکسی (یک نفر در جلو و سه نفر عقب) بنشینند، طوری که سلطان کنار ایلیچ نباشد؟

۱) ۶   ۲) ۸   ۳) ۱۲   ۴) ۲۴   ۵) ۱۶

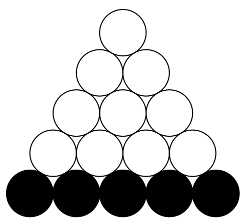
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

تعداد کل حالات نشستن $۲۴ = ۴!$ است. حال تعداد حالات نامطوب را شمرده و از تعداد کل حالات کم می‌کنیم. در حالات نامطلوب دو حالت برای انتخاب صندلی‌های سلطان و ایلیچ (در صندلی‌های عقب) و دو حالت برای جایگشت این دو نفر داریم. دو نفر دیگر نیز به دو حالت در دو صندلی باقی‌مانده می‌نشینند. پس پاسخ برابر است با:

$$۴! - ۲ \times ۲ \times ۲ = ۱۶$$

□

۲ دایره‌های زیر را در نظر بگیرید:



ابتدا پنج دایره‌ی ردیف پایین سیاه و بقیه‌ی دایره‌ها سفید هستند. در هر مرحله می‌توان یک دایره‌ی سفید را که هر دو دایره‌ی زیرین آن سیاه هستند، سیاه کرد. شکل نهایی پس از پنج مرحله چند حالت دارد؟ توجه کنید فقط شکل نهایی مهم بوده و ترتیب انجام مراحل مهم نیست.

۱) ۵   ۲) ۸   ۳) ۱۳   ۴) ۷   ۵) ۱۱

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

دو حالت داریم:

- هر چهار دایره‌ی ردیف دوم (از پایین) سیاه باشند. در این صورت برای تنها دایره‌ی سیاه باقی‌مانده سه حالت داریم.
- دست کم یک دایره از ردیف دوم سفید باشد. در این صورت باید سه دایره‌ی متوالی از ردیف دوم سیاه باشند (در غیر این صورت نمی‌توان ۱۰ دایره‌ی سیاه ساخت). انتخاب این سه دایره دو حالت دارد و دو دایره‌ی سیاه باقی‌مانده به طور یکتا انتخاب می‌شوند.

پس در کل $۵ = ۲ + ۳$ حالت داریم.

□

۳ مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ را در نظر بگیرید. تابع f از A به A را **ضربی** گوییم، اگر به ازای هر $x, y \in A$ دست کم یکی از دو شرط زیر برقرار باشد:

- $x \times y > ۵$
- $f(x \times y) = f(x) \times f(y)$

چند تابع ضربی f از A به A وجود دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۱ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

با جاگذاری $x = ۱$ و $y = ۲$ داریم $f(۱ \times ۲) = f(۱) \times f(۲)$ که نتیجه می‌دهد $f(۱) = ۱$. حال با جاگذاری $x = ۲$ و $y = ۲$ داریم $f(۲ \times ۲) = f(۲) \times f(۲)$ که نتیجه می‌دهد $f(۴) = f(۲)^۲$. پس برای انتخاب $f(۲)$ و $f(۴)$ دو حالت داریم. $f(۳)$ و $f(۵)$ نیز شرط خاصی ندارند و هر چیزی می‌توانند باشند. پس پاسخ برابر با $۵۰ = ۵ \times ۵ \times ۲ \times ۱$ است. □

۴ ۱۰ عدد متمایز در اختیار داریم. یک بار این اعداد را به صورت صعودی مرتب می‌کنیم تا دنباله‌ی $\langle a_۱, \dots, a_{۱۰} \rangle$ به دست آید. بار دیگر اعداد را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم تا دنباله‌ی $\langle b_۱, \dots, b_{۱۰} \rangle$ ساخته شود. برای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۱۰$ فرض کنید $A_i = \{a_۱, \dots, a_i\}$ و $B_i = \{b_۱, \dots, b_i\}$ باشد. در بین ۱۰۰ مجموعه به فرم $A_i \cup B_j$ که $۱ \leqslant i, j \leqslant ۱۰$ چند مجموعه‌ی متمایز وجود دارد؟

۱) ۴۶ ۲) ۳۶ ۳) ۳۷ ۴) ۴۵ ۵) ۵۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

در حالاتی که $i \geqslant j - ۱$ است، $A_i \cup B_j$ شامل تمام اعداد می‌شود. در بقیه‌ی حالات مجموعه‌های متمایز ساخته می‌شود که $\binom{۱۰}{۲} - ۹$ حالت (برای انتخاب i و j) دارند. پس پاسخ برابر $۳۷ = \binom{۱۰}{۲} - ۹ + ۱$ است. □

۵ پنج نفر دور یک دایره هستند. در یک لحظه به طور هم‌زمان هر کس دست‌ش را به سمت یکی از دو نفر مجاور دراز می‌کند. دو نفر که دست‌شان را به سمت هم دراز کرده‌اند با هم دست می‌دهند. به طور میانگین در میان حالات مختلف چند عمل دست دادن انجام می‌شود؟

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) ۱ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۵}{۴}$ ۵) $\frac{۱}{۲}$

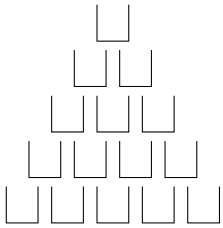
پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

بدون داشتن هیچ‌گونه سواد از امید ریاضی نیز می‌توان با بررسی حالات مختلف مسئله را حل کرد، اما راه حل بهتر تعریف متغیرهای تصادفی $I_۱$ تا $I_۵$ است. در یک وضعیت تعریف می‌کنیم $I_k = ۱$ اگر افراد k و $k + ۱$ به هم دست بدهند و در غیر این صورت تعریف می‌کنیم $I_k = ۰$. توجه کنید $I_۵$ را برای دست دادن افراد شماره ۱ و ۵ تعریف می‌کنیم. به وضوح داریم $E(I_k) = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$. پس با توجه به خواص امید ریاضی داریم:

$$E(\text{تعداد دست دادن‌ها}) = \sum_{k=۱}^{۵} E(I_k) = ۵ \times \frac{۱}{۴} = \frac{۵}{۴}$$

□

۶ شکل زیر، نمایی از تعدادی لیوان است:



ظرفیت هر لیوان یک لیتر است. با شروع از لحظه‌ی صفر، پارسا به طور پیوسته به میزان یک لیتر بر ثانیه در لیوان بالایی آب می‌ریزد. اگر یک لیوان پر شود، آب از دو طرف آن به طور مساوی سرریز می‌کند. جاذبه را بسیار زیاد در نظر بگیرید و فرض کنید اگر آب سرریز شود، به سرعت به لیوان پایینی منتقل می‌شود. فرض کنید t، نخستین لحظه‌ای بر حسب ثانیه باشد که به یکی از لیوان‌های ردیف پایین قطره‌ای از آب برسد. نزدیک‌ترین عدد صحیح به t چیست؟

۱) ۹ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۸ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با نوشتن میزان لحظه‌ی شروع سرریز و سرعت سرریز آب از هر لیوان (با به دست آوردن اعداد با الگوریتم پویا از بالا به پایین) مشاهده می‌کنیم $t = ۸\frac{۱}{۳}$ است. پس پاسخ برابر ۸ است. □

۷ به هر رقم در مبنای دو (۰ یا ۱) یک بیت گفته می‌شود. عمل $\otimes$ بین دو بیت به صورت زیر انجام می‌شود:

$$۰ \otimes ۰ = ۰ \qquad ۰ \otimes ۱ = ۰ \qquad ۱ \otimes ۰ = ۰ \qquad ۱ \otimes ۱ = ۱$$

برای انجام عمل $\otimes$ بین دو عدد، ابتدا آن دو عدد را در مبنای دو می‌نویسیم. اگر تعداد ارقام دو عدد برابر نبود، آن‌قدر سمت چپ عدد کوچک‌تر رقم ۰ می‌گذاریم تا تعداد ارقام‌شان برابر شود. در انتها بیت به بیت عمل $\otimes$ را انجام می‌دهیم. برای مثال:

$$۱۴ \otimes ۵ = ۴$$

زیرا:

$$۱۱۱۰ \otimes ۰۱۰۱ = ۰۱۰۰$$

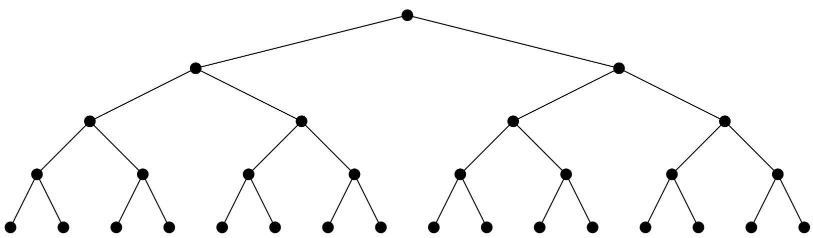
تعداد زوج‌های مرتب (a, b) را از اعداد صحیح بیابید که $۰ \leqslant a, b < ۶۴$ و $a \otimes b = a$ باشد.

۱) ۵۱۲ ۲) ۲۵۶ ۳) ۵۱۱ ۴) ۲۴۳ ۵) ۷۲۹

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اعداد a, b را به صورت اعداد شش رقمی در مبنای دو در نظر بگیرید. رقم i ام دو عدد در صورتی مشکل ایجاد می‌کند که برای a و b به ترتیب ۱ و ۰ باشد. پس برای رقم i ام دو عدد، سه حالت داریم. پس پاسخ برابر $۳^۶ = ۷۲۹$ است. □

۸ نقشه‌ی یک موزه به شکل زیر است:



هر یک از نقاط پایینی یک در ورودی هستند و یک گنج در رأس بالا قرار دارد. دو نقطه که با پاره‌خط به هم وصل هستند، به هم راه مستقیم دارند. **ایلیچ** می‌تواند از یک در ورودی وارد شده و با حرکت در موزه به گنج برسد. برای سرعت دادن به کار، ایلیچ از هر نقطه حداکثر یک بار عبور می‌کند. به چند طریق می‌توان در نقاط شکل دوربین قرار داد، طوری که ایلیچ از هر مسیری که به گنج برسد، توسط دقیقاً یک دوربین دیده شود؟

۱) ۶۲۶   ۲) ۲۶   ۳) ۶۷۷   ۴) ۱۰۲۴   ۵) ۶۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

اگر f_n پاسخ برای درختی به ارتفاع n رأس باشد، با حالت‌بندی بر روی این که ریشه دوربین دارد یا نه، داریم:

$$f_n = ۱ + f_{n-۱} \times f_{n-۱}$$

از آن‌جایی که $f_۱ = ۱$، پاسخ مسئله برابر $f_۵ = ۶۷۷$ است. □

۹ در ابتدا دو جعبه‌ی خالی به نام‌های A و B و چهار توپ با شماره‌های ۱ تا ۴ داریم. برای هر i به ترتیب از ۱ تا ۴ در مرحله‌ی i اُم توپ شماره i را به احتمال $\frac{a+۱}{i+۱}$ در جعبه‌ی A و به احتمال $\frac{b+۱}{i+۱}$ در جعبه‌ی B می‌اندازیم که a و b به ترتیب تعداد توپ‌های جعبه‌های A و B قبل از انجام مرحله‌ی i اُم هستند. احتمال این را بیابید که در انتها در هر جعبه دست کم یک توپ باشد.

۱) $\frac{۳}{۵}$ ۲) $\frac{۲}{۵}$ ۳) $\frac{۵}{۶}$ ۴) $\frac{۴}{۵}$ ۵) $\frac{۵۹}{۶۰}$

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

احتمال این که تمام توپ‌ها در جعبه‌ی A بروند برابر $\frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} \times \frac{۴}{۵} = \frac{۱}{۵}$ است. پس احتمال حالات نامطلوب برابر $\frac{۱}{۵} \times ۲$ بوده و بنابراین پاسخ برابر $۱ - \frac{۲}{۵} = \frac{۳}{۵}$ است. □

۱۰ گرافی ۱۰۰۰ رأسی با رأس‌های ۱ تا ۱۰۰۰ در نظر بگیرید. برای هر $۱ \leqslant i < j \leqslant ۱۰۰۰$، بین دو رأس i و j یال قرار می‌دهیم، اگر و تنها اگر i اُمین رقم نمایش دودویی عدد j (از سمت راست) برابر ۱ باشد. کوچک‌ترین k را بیابید که بتوان با k رنگ رأس‌های این گراف را رنگ‌آمیزی کرد، طوری که هر دو رأس مجاور ناهم‌رنگ باشند.

۱) ۶   ۲) ۲   ۳) ۳   ۴) ۵   ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

ابتدا ثابت می‌کنیم رنگ‌آمیزی با کم‌تر از چهار رنگ امکان ندارد. رأس‌های شماره ۱، ۳، ۵ و ۲۱ دوبه‌دو به هم وصل هستند. پس دست کم به ۴ رنگ نیاز داریم. حال نشان می‌دهیم چهار رنگ برای رنگ‌آمیزی کافی است. رأس‌های ۱ و ۲ را با رنگ A، رأس ۳ را با رنگ B، رأس‌های ۴ تا ۱۵ را با رنگ C و رأس‌های ۱۶ تا ۱۰۰۰ را با رنگ D رنگ کنید. □

۱۱ در خانه‌ی پایین–چپ جدول زیر، یک لاک‌پشت قرار دارد و می‌خواهد به خانه‌ی بالا–راست برسد. روی هر خانه، ارتفاع آن نوشته شده است. لاک‌پشت در هر مرحله می‌تواند یک واحد به راست یا بالا برود و در هر گام، به اندازه‌ی اختلاف ارتفاع دو خانه خسته می‌شود (حتی اگر ارتفاع کم شود). کمینه‌ی مجموع میزان خستگی در مسیر چیست؟

۷۰۰	۱۴۰	۳۰۰	۱۳۰	۲۰۰
۹۰۰	۱۱۰	۵۰۰	۸۰۰	۵۰۰
۱۰۰	۴۰۰	۱۶۰	۶۰۰	۸۰۰
۸۰۰	۳۰۰	۱۲۰	۱۰۰	۲۰۰
۰	۷۰۰	۲۰۰	۷۰۰	۹۰۰

۱) ۲۰۰۰ ۲) ۳۸۰۰ ۳) ۲۳۱۰ ۴) ۱۹۲۰ ۵) ۳۲۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

اگر $b[i][j]$ برابر ارتفاع خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j و هم‌چنین $a[i][j]$ برابر کم‌ترین میزان خستگی لاک‌پشت برای رسیدن از مبدأ به این خانه باشد، داریم:

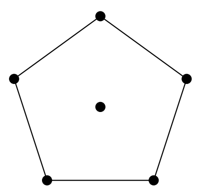
$$a[i][j] = min\Big(\big|b[i][j] - b[i-1][j]\big| + a[i-1][j], \big|b[i][j] - b[i][j-1]\big| + a[i][j-1]\Big)$$

این رابطه با بررسی دو حالت ورود به خانه‌ی مذکور گفته شده است (از چپ یا پایین). حال با به دست آوردن مقادیر $a[i][j]$ به صورت پویا، مقادیر زیر به دست می‌آید:

۲۵۰۰	۱۵۲۰	۱۶۸۰	۱۸۵۰	۱۹۲۰
۲۳۰۰	۱۴۹۰	۱۶۶۰	۱۹۶۰	۲۲۶۰
۱۵۰۰	۱۲۰۰	۱۳۲۰	۱۷۶۰	۱۹۶۰
۸۰۰	۱۱۰۰	۱۲۸۰	۱۳۰۰	۱۴۰۰
۰	۷۰۰	۱۲۰۰	۱۷۰۰	۹۰۰

پس پاسخ برابر ۱۹۲۰ است. □

۱۲ شکل زیر یک پنج‌ضلعی منتظم به همراه یک نقطه در مرکز آن است:



می‌خواهیم بین برخی از شش نقطه‌ی شکل، پاره‌خط‌هایی بکشیم، طوری که شرایط زیر برقرار باشد:

- هیچ دو پاره‌خطی هم‌دیگر را قطع نکنند (مگر در خود نقاط شکل).
- سطح داخل شکل به تعدادی مثلث افراز شود، طوری که هر کدام از نقاط شکل، رأس حداقل یکی از مثلث‌ها باشند.

شکل نهایی چند حالت دارد؟

۱) ۱۰   ۲) ۱۱   ۳) ۱۲   ۴) ۱   ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

به قطری از پنج‌ضلعی که دو رأس نامجاور را به هم وصل کند، **قطرک** می‌گوییم. با حالت‌بندی بر روی تعداد قطرک‌ها داریم:

- اگر قطرک نداشته باشیم، تمام رأس‌ها باید به رأس وسط وصل شوند که یک حالت دارد.
- اگر یک قطرک داشته باشیم، رأس وسط درون یک چهارضلعی قرار می‌گیرد و باید به تمام چهار رأس آن وصل شود. انتخاب قطرک گفته شده پنج حالت دارد.
- اگر دو قطرک داشته باشیم، باید این دو قطرک در یک رأس مشترک باشند که پنج حالت برای انتخاب‌شان وجود دارد. در ادامه رأس وسط درون یک مثلث قرار می‌گیرد و باید به سه رأس آن وصل شود.

پس در کل $۱۱ = ۱ + ۵ + ۵$ حالت داریم. □

۱۳ به یک مجموعه از اعداد **شکننده** گوییم، اگر بتوان اعداد آن را به دو مجموعه افراز کرد، طوری که مجموع اعداد آن‌ها برابر باشد. چند تا از مجموعه‌های زیر شکننده هستند؟

$A = \{۱, ۲, \ldots, ۱۰۰\}$ $B = \{۲, ۴, \ldots, ۱۰۰\}$ $C = \{۱, ۳, \ldots, ۹۹\}$ $D = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \ldots, \frac{۱}{۱۰۰}\}$

۱) ۱   ۲) ۲   ۳) ۴   ۴) ۰   ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

- مجموعه‌ی A شکننده است. اعداد به صورت $۴k + ۱$ و $۴k$ را در یک دسته و بقیه‌ی اعداد را در دسته‌ی دیگر می‌گذاریم.
- مجموعه‌ی B شکننده نیست. فرض کنید مجموعه‌ی B به دو دسته‌ی X و Y تقسیم شود. در این صورت اگر تمام اعداد X و Y را تقسیم بر دو کنیم، باز هم مجموع X و Y یکسان می‌ماند. در نتیجه باید مجموعه‌ی $\{۱, ۲, \ldots, ۵۰\}$ هم شکننده باشد، در حالی که مجموع اعداد آن فرد است و این امر ممکن نیست.
- مجموعه‌ی C شکننده است. می‌توانیم آن را به دو دسته‌ی

$$X = \{۱, ۳, ۵, ۹\} \cup \{۱۳, ۱۹, ۲۱, ۲۷, \ldots, ۹۳, ۹۹\}$$

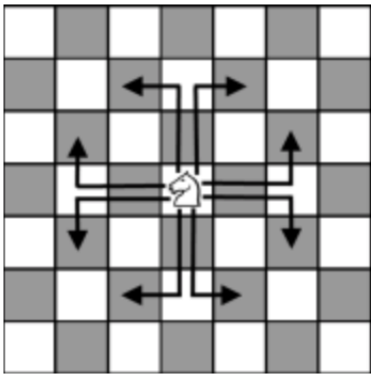
و

$$Y = \{۷, ۱۱\} \cup \{۱۵, ۱۷, ۲۳, ۲۵, \ldots, ۹۵, ۹۷\}$$

افراز کنیم.
- مجموعه‌ی D شکننده نیست. فرض کنید مجموعه‌ی D به دو دسته‌ی X و Y تقسیم شود. ک.م.م اعداد ۱ تا ۱۰۰ را L در نظر بگیرید. همه‌ی اعداد X و Y را در L ضرب کنید. تمام اعداد به جز $\frac{۱}{۶۴}$ پس از این عمل زوج می‌شوند و تنها یک عدد فرد ($\frac{L}{۶۴}$) به وجود می‌آید. پس مجموع یکی از X و Y زوج و دیگری فرد می‌شود که تناقض است.

□

۱۴ یک صفحه شطرنج نامتناهی داریم. برخی از خانه‌های این صفحه **امن** هستند. در هر خانه از صفحه یک عدد می‌نویسیم که برابر با حداقل تعداد حرکاتی است که یک مهره‌ی اسب باید انجام دهد تا از آن خانه به یک خانه‌ی امن برسد. برای مثال روی خانه‌های امن، عدد صفر نوشته شده است.
برای کسانی که با شطرنج آشنا نیستند، اگر مهره‌ی اسب در خانه‌ی مشخص شده‌ی شکل زیر باشد، در یک گام می‌تواند به یکی از هشت خانه‌ی مشخص شده برود:



فرض کنید A و B دو خانه‌ی مجاور (دارای یک ضلع مشترک) باشند که عدد خانه‌ی A برابر ۵۷ است. کدام‌یک نمی‌تواند عدد خانه‌ی B باشد؟

۱) ۵۷ ۲) ۵۵ ۳) ۵۶ ۴) ۶۰ ۵) ۵۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

فاصله‌ی دو خانه‌ی مجاور برابر سه است. پس امکان ندارد اختلاف اعداد دو خانه‌ی مجاور بیش از سه باشد. پس پاسخ برابر ۵۳ است. برای گزینه‌های دیگر نیز به راحتی می‌توان مثال ارائه کرد. □

۱۵ یک مکعب $a \times b \times c$ موازی محورهای مختصات داریم و می‌خواهیم آن را به طور کامل با آجرهای ۳ × ۱ × ۱ پر کنیم. آجرها نمی‌توانند از مکعب بیرون بزنند. به آجرهای موازی محور x، آجر نوع X می‌گوییم. به همین ترتیب آجرهای نوع Y و نوع Z را تعریف می‌کنیم. به ازای چند تا از حالات زیر برای ابعاد مکعب می‌توان این کار را انجام داد، طوری که تعداد آجرهای هر سه نوع برابر باشد؟

۸ × ۷ × ۵ ۷ × ۶ × ۵ ۷ × ۶ × ۶ ۷ × ۷ × ۶

۱) ۴ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر تعداد آجرهای در یک راستا را n در نظر بگیریم، تعداد کل خانه‌های مکعب برابر n × ۳ × ۳ خواهد بود (زیرا سه راستا داریم و هر آجر نیز سه خانه دارد). پس تعداد خانه‌ها باید بر ۹ بخش‌پذیر باشد که فقط مکعب ۷ × ۶ × ۶ این خاصیت را دارد. برای این مکعب نیز فرض کنید ۷ ارتفاع باشد. لایه‌های ۱، ۴ و ۷ مکعب را رنگ کنید. هر آجر عمودی دقیقن یکی از خانه‌های این لایه‌ها را می‌پوشاند. تعداد مکعب‌های عمودی ۲۸ تاست. پس از خانه‌های این لایه‌ها ۲۸ − ۳ × ۳۶ خانه برای دو راستای دیگر می‌ماند که باید بر ۳ بخش‌پذیر باشد. تناقض حاصل حکم را ثابت می‌کند. □

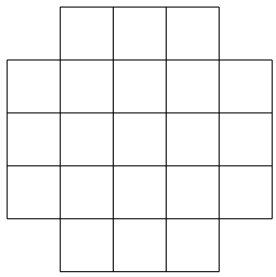
۱۶ تعدادی کیسه دور یک دایره هستند که در مجموع ۱۰۰ سنگ‌ریزه دارند. در هر دقیقه به طور هم‌زمان، از هر کیسه که دست کم دو سنگ‌ریزه دارد، یک سنگ‌ریزه به هر یک از دو کیسه‌ی مجاور منتقل می‌شود. اگر پس از یک مرحله تعداد سنگ‌ریزه‌های هیچ کیسه‌ای تغییر نکند، کار متوقف می‌شود. حداقل چند دقیقه باید صبر کنیم تا مطمئن باشیم کار متوقف شده است؟

۱) ۶۶ ۲) ۵۰ ۳) ۳۳ ۴) ۱۰۰ ۵) ممکن است عملیات هیچ گاه متوقف نشود

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر چهار کیسه داشته باشیم که به ترتیب ۰، ۵۰، ۰ و ۵۰ سنگ‌ریزه داشته باشند، پس از یک مرحله کیسه‌ها به ترتیب ۵۰، ۰، ۵۰ و ۰ سنگ‌ریزه خواهند داشت و کار هیچ‌گاه متوقف نخواهد شد. □

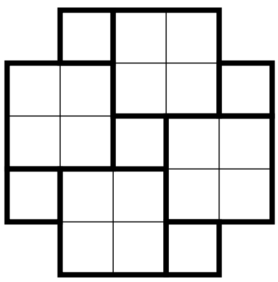
۱۷ شکل زیر، یک جدول 5×5 با حذف چهار گوشه‌ی آن است. می‌خواهیم این شکل را به طور کامل با کاشی‌های 1×1، 2×2 و 3×3 بپوشانیم، طوری که کاشی‌ها روی هم قرار نگرفته و از جدول بیرون نزنند. نیازی نیست از هر سه نوع کاشی استفاده کنیم. حداقل تعداد کاشی‌ها برای انجام این کار چیست؟



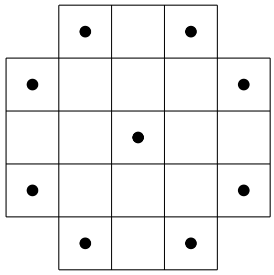
۱) ۱۱ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۳ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

روش پرکردن با ۹ کاشی:

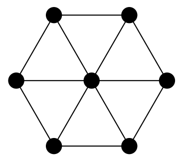


حال ثابت می‌کنیم با کم‌تر از ۹ کاشی امکان پر کردن جدول وجود ندارد. حداکثر یک کاشی 3×3 می‌توانیم داشته باشیم. اگر کاشی 3×3 نداشته باشیم، هر کاشی حداکثر یک خانه‌ی مشخص شده در شکل زیر را می‌پوشاند و دست کم به ۹ کاشی نیاز داریم:



اگر کاشی ۳ × ۳ داشته باشیم و این کاشی در وسط جدول باشد، بقیه‌ی جدول باید با کاشی‌های ۱ × ۱ پر شوند که دست کم به ۱۳ کاشی نیاز داریم. اگر هم کاشی ۳ × ۳ داشته باشیم ولی در وسط جدول نباشد، شش خانه به طور یکتا با ۱ × ۱ پر می‌شوند و یک جدول ۳ × ۲ می‌ماند که خودش دست کم به سه کاشی نیاز دارد. پس این حالت نیز دست کم ۱۰ = ۳ + ۶ + ۱ می‌خواهد. □

۱۸ می‌خواهیم روی هفت نقطه‌ی شکل زیر، اعداد ۱ تا ۷ را بنویسیم (هر کدام از اعداد دقیقاً روی یک نقطه و هر نقطه شامل دقیقاً یک عدد باشد):



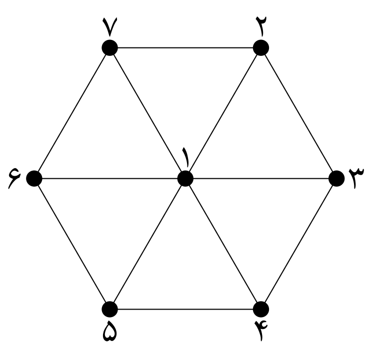
به یک مثلث **ایده‌آل** گوییم، اگر با خواندن اعداد مثلث به ترتیب ساعت‌گرد از کوچک‌ترین عدد، دنباله‌ای صعودی به دست آید. برای مثال در شکل زیر مثلث سمت چپ ایده‌آل است، اما مثلث سمت راست ایده‌آل نیست:

پس از عددگذاری شکل گفته شده، حداکثر چند مثلث از شش مثلث موجود ایده‌آل خواهند بود؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۴ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

روش برای پنج مثلث ایده‌آل:



حال ثابت می‌کنیم بیش از پنج مثلث ایده‌آل امکان ندارد. برای اثبات این امر کافی است فرض کنیم تمام مثلث‌ها ایده‌آل هستند و با گذاشتن متغیرهای $a_۱$ تا $a_۷$ روی رئوس و نوشتن نابرابری‌ها به تناقض برسیم. □

۱۹ جدول زیر را در نظر بگیرید:

در خانه‌ی پایین‌ـ‌چپ جدول یک مهره قرار دارد. دو خانه از جدول را **همسایه** گوییم، اگر یک ضلع یا یک رأس مشترک داشته باشند. به چند طریق می‌توان از وضعیت مشخص شده در شکل آغاز کرده، در هر مرحله مهره را به یک خانه‌ی همسایه ببریم، از هر خانه دقیقاً یک بار عبور کنیم و به خانه‌ی آغازین برگردیم؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۶ ۳) ۲۴ ۴) ۳۲ ۵) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای هر ستون از ستون دوم به بعد، برای دو خانه‌ی آن دو حالت داریم (یکی باید در مسیر رفت و دیگری در مسیر برگشت باشد). خانه‌ی بالای ستون یکم نیز دو حالت دارد (یا در همان ابتدا به آن می‌رویم و یا در گام آخر از آن می‌گذریم). پس $۳۲ = ۲^۵$ حالت داریم. □

۲۰ در سوال قبل، به چند طریق می‌توانیم مهره را از خانه‌ی پایین‌ـ‌چپ به خانه‌ی بالاـ‌راست برسانیم، طوری که از هر خانه حداکثر یک بار عبور کنیم؟

۱) ۱۱۶ ۲) ۱۰۰ ۳) ۴۶۴ ۴) ۵۶۰ ۵) ۴۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

تعداد روش‌های رسیدن از خانه‌ی پایین‌ـ‌چپ به خانه‌ی بالاـ‌راست در یک جدول $۲ \times n$ را a_n و تعداد روش‌های رسیدن از خانه‌ی بالاـ‌چپ به خانه‌ی بالاـ‌راست در همین جدول را b_n در نظر می‌گیریم. با حالت‌بندی روی گام نخست، روابط بازگشتی زیر را داریم:

$$a_n = ۲a_{n-۱} + ۲b_{n-۱} + ۲a_{n-۲} + ۲b_{n-۲}$$
$$b_n = ۲a_{n-۱} + ۲b_{n-۱} + ۲a_{n-۲} + ۲b_{n-۲}$$

از آن‌جایی که

$$a_۱ = ۱ \qquad a_۲ = ۵ \qquad b_۱ = ۱ \qquad b_۲ = ۵$$

مقدار $a_۵ = ۵۶۰$ به دست می‌آید. □

۲۱ حافظه‌ی سلطان ۲۰ خانه با شماره‌های ۱ تا ۲۰ دارد. خانه‌ی i ام حافظه را با $A[i]$ نشان می‌دهیم. در ابتدا در تمام خانه‌های حافظه، عدد ۱ نوشته شده است. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۱. مقدار ans را برابر ۰ قرار بده.
۲. اگر مقدار تمام خانه‌های حافظه‌ی سلطان برابر ۰ بود به خط ۱۵ برو.

۳. مقدار ans را یک واحد زیاد کن.
۴. مقدار $index$ را برابر ۱ قرار بده.
۵. اگر $index > ۲۰$ بود به خط ۲ برو.
۶. اگر $A[index] = ۰$ بود به خط ۱۰ برو.
۷. مقدار $A[index]$ را برابر ۰ کن.
۸. مقدار $index$ را دو واحد زیاد کن.
۹. به خط ۵ برو.
۱۰. مقدار tmp را برابر ۰ قرار بده.
۱۱. اگر $index < ۲۰$ بود، مقدار tmp را برابر $A[index + ۱]$ قرار بده.
۱۲. مقدار $A[index]$ را برابر tmp قرار بده.
۱۳. مقدار $index$ را یک واحد زیاد کن.
۱۴. به خط ۵ برو.
۱۵. پایان

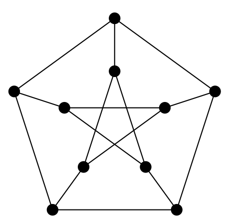
پس از پایان الگوریتم، مقدار ans چیست؟

۱) ۲۰ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۱۰ ۵) الگوریتم هیچ گاه تمام نخواهد شد

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

در سری یکم مقادیر خانه‌های با شماره‌ی فرد برابر ۰ می‌شود. در سری دوم مقدار $A[۱]$ برابر ۱ شده و بقیه‌ی خانه‌ها ۰ می‌شوند. در سری سوم مقدار $A[۱]$ نیز ۰ شده و کار تمام می‌شود. □

۲۲ گراف زیر را در نظر بگیرید:



یک گنج در یکی از رأس‌های گراف مخفی شده است. **روزبه** یک دستگاه گنج‌یاب دارد. او در هر مرحله می‌تواند یک دور به طول پنج از گراف را به دستگاه بدهد و بفهمد گنج در رأس‌های این دور هست یا خیر. روزبه دست‌کم به چند مرحله استفاده از دست‌گاه نیاز دارد تا مطمئن باشد می‌تواند جای گنج را بفهمد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۶ ۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

ابتدا روشی با چهار مرحله ارائه می‌دهیم. روزبه در ابتدا یک دور به طول پنج انتخاب می‌کند. چه پاسخ خیر باشد و چه بله، رأس‌های کاندید برای گنج در یک دور به طول پنج هستند. حال روزبه یک دور به طول پنج انتخاب می‌کند که شامل دو رأس مجاور از پنج رأس کاندید باشد.

- اگر جواب خیر باشد، سه رأس کاندید برای گنج می‌ماند. حال یک دور به طول پنج انتخاب می‌کنیم که شامل دو رأس مجاور از این سه رأس باشد. اگر جواب خیر باشد با یک پرسش دیگر (دوری که شامل یکی از دو رأس کاندید باشد) مسئله حل می‌شود و اگر هم جواب بله باشد که گنج پیدا شده است.

- اگر جواب بله باشد با یک پرسش دیگر (دوری که شامل یکی از دو رأس کاندید باشد) مسئله حل می‌شود.

حال ثابت می‌کنیم روشی با بهتر از چهار مرحله وجود ندارد. در ابتدا ۱۰ رأس کاندید برای گنج داریم. در هر مرحله رأس‌های کاندید به دو دسته‌ی X (درون دور انتخاب شده) و Y (خارج دور انتخاب شده) تقسیم می‌شوند. ممکن است در هر مرحله پاسخ طوری باشد که تعداد خانه‌های کاندید بیش‌تری باقی بماند. پس دست کم $۴ = \lceil log_۲ ۱۰ \rceil$ مرحله نیاز است. □

---

n دستگاه پخش کننده‌ی موسیقی یکسان و n هندزفری یکسان داریم. به هر کدام از دستگاه‌ها یک هندزفری وصل کرده‌ایم. هر هندزفری نیز دو گوشی دارد که یکی مخصوص گوش راست و یکی مخصوص گوش چپ است.
n نفر در یک گروه هستند و می‌خواهند از طریق این دستگاه‌ها و هندزفری‌ها موسیقی گوش کنند. هر کس می‌تواند یک گوشی چپ و یک گوشی راست برداشته و آهنگ گوش کند. دو گوشی‌ای که یک فرد برمی‌دارد می‌توانند از یک هندزفری نباشند، اما باید آهنگ یکسانی را پخش کنند.
در انتها تأکید می‌کنیم دستگاه‌های پخش کننده و هندزفری‌ها را یکسان در نظر بگیرید.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۳ فرض کنید $n = ۴$ است. دو تا از دستگاه‌ها در حال پخش موسیقی $M_۱$ و دو تای دیگر در حال پخش موسیقی $M_۲$ هستند. افراد به چند طریق می‌توانند هندزفری‌ها را استفاده کرده و موسیقی‌ها را گوش کنند؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۱۶ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

انتخاب دو نفری که در حال گوش کردن به موسیقی $M_۱$ هستند $\binom{۴}{۲}$ حالت دارد. دو نفر دیگر باید موسیقی $M_۲$ را گوش کنند. حال برای دو نفر هر موسیقی دو حالت برای گوش کردن با هندزفری‌ها داریم (یا هر کدام به طور کامل هندزفری یک دستگاه را برمی‌دارند و یا از هر دستگاه یک گوشی هندزفری را برمی‌دارند). پس پاسخ برابر $۲۴ = ۲ \times ۲ \times \binom{۴}{۲}$ است. □

۲۴ دو نفر با نام‌های A و B را **دوست** گوییم، اگر هندزفری‌ای وجود داشته باشد که یک گوشی آن در اختیار A و گوشی دیگر در اختیار B باشد. دو نفر با نام‌های A و B را **آشنا** گوییم، اگر دنباله‌ی $\langle C_۱, C_۲, \dots, C_k \rangle$ از افراد وجود داشته باشد که $k \geqslant ۲$ و $C_۱$ خود A باشد، $C_۱$ با $C_۲$ دوست باشد، $C_۲$ با $C_۳$ دوست باشد و ... و $C_{k-۱}$ با C_k دوست باشد و C_k خود B باشد. واضح هست که دو دوست، آشنا نیز هستند.
فرض کنید $n = ۱۰$ است. پنج تا از دستگاه‌ها در حال پخش موسیقی $M_۱$ و پنج تای دیگر در حال پخش موسیقی $M_۲$ هستند. به حالتی از گوش کردن موسیقی‌ها **سلطانی** گوییم، اگر هیچ دو نفر غیر آشنایی، موسیقی یکسانی گوش نکنند. افراد به چند حالت سلطانی می‌توانند هندزفری‌ها را استفاده کرده و موسیقی‌ها را گوش کنند؟

۱) $۹!$ ۲) $۲^۸ \times ۵! \times ۵!$ ۳) $\frac{۱۰!}{۲۵}$ ۴) $۱۰!$ ۵) $۲^۹$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

$\binom{۱۰}{۵}$ حالت برای انتخاب پنج نفر موسیقی $M_۱$ داریم. بقیه باید موسیقی $M_۲$ را گوش کنند. پنج نفر هر موسیقی یک جایگشت دوری با هندزفری‌ها می‌سازند که $۴!$ حالت دارد. پس پاسخ برابر

$$\binom{۱۰}{۵} \times ۴! \times ۴! = \frac{۱۰!}{۲۵}$$

است. □

دنباله‌ای از اعداد طبیعی و متمایز را در نظر بگیرید که از عدد ۱ شروع شده و به عدد n ختم می‌شود. به چنین دنباله‌ای **عول** گوییم، اگر هر عدد دنباله، مضرب عدد قبلی باشد. برای مثال دنباله‌ی $\langle ۱, ۳, ۶, ۳۰, ۶۰ \rangle$ یک دنباله‌ی عول است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۵ تعداد عناصر بلندترین دنباله‌ی عول به ازای $n = ۸۱۰۰۰۰$ چیست؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۳ ۳) ۱۱ ۴) ۹ ۵) ۱۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

با تجزیه‌ی n داریم:

$$۸۱۰۰۰۰ = ۲^۴ \times ۳^۴ \times ۵^۴$$

در هر مرحله دست کم یک عامل در عدد ضرب می‌شود. پس طول بلندترین دنباله‌ی عول ۱۳ خواهد بود. □

۲۶ تعداد عناصر بلندترین دنباله‌ی عول به ازای $n = ۱۰۸۰۰$ را k در نظر بگیرید. تعداد دنباله‌های عول k عنصره به ازای $n = ۱۰۸۰۰$ چیست؟

۱) ۵۱۲۰ ۲) ۲۸۸ ۳) !۹ ۴) ۱۲۶۰ ۵) !۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با تجزیه‌ی عدد داریم: $۵^۲ \times ۳^۳ \times ۲^۴ = ۱۰۸۰۰$ مانند استدلال سوال قبل، طول بلندترین دنباله‌ی عول برابر $k = ۱۰$ خواهد شد. حال برای آن که طول دنباله ۱۰ شود باید در هر مرحله دقیقن یک عامل در عدد ضرب شود. این تعداد معادل یک جایگشت از ۴ عدد ۲، ۳ عدد ۳ و ۲ عدد ۵ است. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۱۰!}{۴!۳!۲!} = ۱۲۶۰$$

□

۲۷ چند دنباله‌ی عول به ازای $n = ۵۱۲۰$ وجود دارد؟

۱) ۱۲۲۸۸ ۲) ۶۱۴۴ ۳) ۵۶۳۲ ۴) ۴۰۹۶ ۵) ۳۰۷۲

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

با تجزیه‌ی عدد داریم: $n = ۲^{۱۰} \times ۵$ دو حالت داریم:

- عامل پنج در یک مرحله‌ی مستقل ضرب شود. در این صورت اگر عامل‌های ۲ در k مرحله ضرب شوند، تعداد حالات برابر تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_۱ + \ldots + x_k = ۱۰$ در مجموعه‌ی اعداد طبیعی است که برابر $\binom{۹}{k-۱}$ می‌باشد. انتخاب مرحله‌ی عدد پنج نیز $k + ۱$ حالت دارد.
- مانند استدلال حالت قبل $\binom{۹}{k-۱}$ حالت برای پخش عوامل دو در یک دنباله‌ی به طول k داریم، اما این بار انتخاب مرحله‌ی عدد پنج k حالت دارد.

با استفاده از اتحادهای ترکیبیاتی پاسخ برابر است با:

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=۱}^{۱۰}(k+۱)\binom{k-۱}{۹} + \sum_{k=۱}^{۱۰} k\binom{k-۱}{۹} \\ &= ۲\sum_{k=۱}^{۱۰}(k-۱)\binom{k-۱}{۹} + ۳\sum_{k=۱}^{۱۰}\binom{k-۱}{۹} \\ &= ۲ \times ۹ \times ۲^{۹-۱} + ۳ \times ۲^{۹} \\ &= ۶۱۴۴ \end{aligned}$$

□

باکتری **فلاجلا** به هنگام تولید مثل به سه باکتری تقسیم شده و خودش از بین می‌رود. به باکتری‌ای که تولید مثل می‌کند، **والد** و به سه باکتری به وجود آمده، **فرزندان** او می‌گوییم. ممکن است یک باکتری قبل از تولید مثل بمیرد که در این صورت به سرعت تجزیه شده و اثری از او باقی نمی‌ماند.
مدت‌ها پیش، **سلطان** یک باکتری فلاجلا به نام **آر.بی.جی** خرید و آن را در قفس نگه‌داری می‌کرد! پس از مدتی این باکتری از بین رفته است، اما قفس تعدادی باکتری دارد که طبیعتاً از نوادگان آر.بی.جی هستند. سلطان دل‌ش برای آر.بی.جی تنگ شده و می‌خواهد ژن آر.بی.جی را بازیابی کند. زیست‌شناسان به تکنولوژی‌ای دست پیدا کرده‌اند که با استفاده از ژن دو تا از فرزندان یک باکتری والد، می‌توانند ژن او را بازیابی کنند.
فرض کنید تعداد باکتری‌های درون قفس n باشد. به یک وضعیت **بحرانی** گوییم، اگر بتوانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما در این بازیابی به همه‌ی n باکتری نیاز داشته باشیم.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سؤال زیر پاسخ دهید

۲۸ در این سوال فرض کنید نتایج تحقیقات این باشد که هیچ کدام از فرزندان آر.بی.جی و فرزندان فرزندان او در قفس نیستند. در بین تمام حالات ممکن که امکان بازیابی ژن آر.بی.جی وجود دارد، کمینه‌ی تعداد باکتری‌های درون قفس چیست؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۸ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دست کم به ژن دو فرزند آر.بی‌جی نیاز داریم. هر فرزند نیز دست کم به ژن دو فرزندش نیاز دارد. هر کدام از آن‌ها نیز دست کم ژن دو فرزندشان را می‌خواهند. پس دست کم $۸ = ۲ \times ۲ \times ۲$ باکتری نیاز است. روش ممکن با ۸ باکتری نیز مشابه استدلال گفته شده به دست می‌آید. □

۲۹ به ازای چند n از ۲ تا ۱۰ می‌توان وضعیتی بحرانی با n باکتری درون قفس داشت؟

۱) ۲ ۲) ۹ ۳) ۵ ۴) ۱ ۵) ۷

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای تمام n ها ممکن است. برای ۲ باکتری که وضعیت واضح است (تنها ژن دو فرزند آر.بی.جی موجود باشد). فرض کنید برای n باکتری ممکن باشد. برای $n+۱$ باکتری کافی است یک باکتری بدون فرزند (برای مثال

جوان‌ترین باکتری!) را در نظر گرفته و به جای او، دو فرزند از او در قفس بگذاریم. پس با استقرا ثابت می‌شود تمام n ها ممکن است. □

۳۰ کدام گزاره یا گزاره‌های زیر درست هستند؟

آ) وضعیتی با شش باکتری درون قفس وجود دارد که با استفاده از هر پنج باکتری می‌توانیم ژن آر.بی.جی را بازیابی کنیم، اما چهار باکتری وجود دارند که نمی‌توان فقط با استفاده از آن‌ها ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

ب) وضعیتی با چهار باکتری درون قفس وجود دارد که به ازای هر دو باکتری، با استفاده از فقط همان دو باکتری می‌توان ژن آر.بی.جی را بازیابی کرد.

ج) وضعیتی بحرانی با پنج باکتری وجود دارد که هر باکتری فرزند یا فرزند فرزند آر.بی.جی باشد.

۱) ب و ج ۲) ب ۳) آ ۴) آ و ج ۵) آ و ب

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

- گزاره‌ی (آ) صحیح است. فرض کنید از هر فرزند آر.بی.جی دو فرزند در قفس باشند و باکتری دیگری نیز نباشد.
- گزاره‌ی (ب) صحیح نیست. اگر با استفاده از فقط دو باکتری بتوان ژن آر.بی.جی را شناسایی کرد باید آن دو، فرزندان آر.بی.جی باشند. پس گزاره ممکن نیست.
- گزاره‌ی (ج) صحیح نیست. اثبات با بررسی حالات انجام می‌شود.

□