

## ضدعفونی زمین (۲۰ نمره)

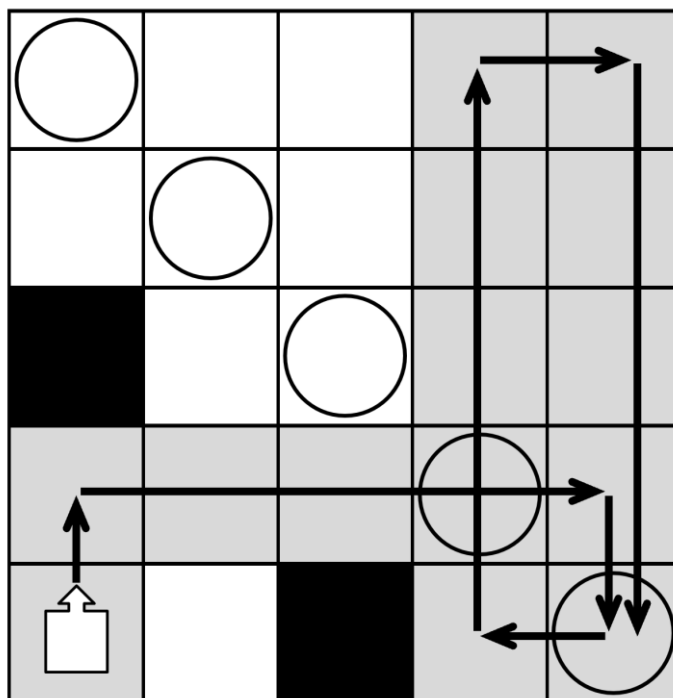
زارپیچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، یک ربات برای ضدعفونی کردن زمین اتاق ساخته است. زمین اتاقی که ربات در آن قرار دارد از بالا به صورت جدولی مربع شکل دیده می‌شود. ربات در ابتدا روی خانه‌ی گوشه‌ی پایین-چپ جدول قرار دارد. در برخی خانه‌های جدول وسایل قرار دارد و آن خانه‌ها مسدود است. ربات ابتدا رو به بالای جدول قرار دارد و همواره به صورت زیر حرکت می‌کند:

- اگر ربات مقابل دیوار قرار نداشت و خانه‌ی مقابل ربات مسدود نبود، ربات یک خانه به جلو حرکت می‌کند.
- در غیر این صورت، ربات ۹۰ درجه در جهت ساعت‌گرد می‌چرخد.

این ربات در حین حرکت، روی هر خانه‌ای از جدول که برود، آن را ضدعفونی می‌کند. هدف زارپیچ آن است که همه‌ی خانه‌های **قطر اصلی** جدول حداقل یک بار توسط ربات پیموده و ضدعفونی شوند. قطر اصلی مجموعه‌ای از خانه‌های جدول است که از خانه‌ی بالا-چپ جدول شروع می‌شود و تا خانه‌ی پایین-راست جدول ادامه می‌یابد.

امکان دست‌یابی به هدف زارپیچ به این بستگی دارد که چه خانه‌هایی از جدول مسدود باشند. اگر در یک جدول، ربات (با شروع از خانه‌ی پایین-چپ و جهت اولیه‌ی رو به بالا، و حرکت طبق قواعد گفته شده) همه‌ی خانه‌های قطر اصلی را حداقل یک بار ضدعفونی کند، آن جدول را **مطلوب** می‌نامیم. بالطبع، هیچ یک از خانه‌های قطر اصلی و یا خانه‌ی شروع ربات در یک جدول مطلوب مسدود نیست.

مثلا در شکل زیر، یک نمونه از جدول  $5 \times 5$  را می‌بینیم که مطلوب نیست. در این جدول، خانه‌های قطر اصلی با دایره، خانه‌های مسدود با رنگ سیاه، و خانه‌های ضدعفونی شده با رنگ خاکستری مشخص شده‌اند. همان‌طور که مشخص است، در این جدول ربات تنها ۲ خانه از ۵ خانه‌ی قطر اصلی را ضدعفونی می‌کند.



الف) یک نمونه جدول مطلوب  $5 \times 5$  بکشید. (۵ نمره)

ب) آیا جدول مطلوب  $1399 \times 1399$  داریم؟ در صورت وجود، آن را توصیف کنید، و در غیر این صورت، ثابت کنید که وجود ندارد. (۱۵ نمره)

## فاصله‌گذاری اجتماعی (۲۰ نمره)

زاریچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، اکنون درگیر یک بازی با ویروس کرونا شده است. بازی روی یک جدول با  $n$  سطر و  $n$  ستون انجام می‌شود که در ابتدا خالی است. در طول بازی قرار است افرادی روی خانه‌های این جدول قرار بگیرند. با توجه به بحث فاصله‌گذاری اجتماعی، یک خانه‌ی جدول را ایمن می‌دانیم اگر در هیچ یک از خانه‌های مجاور ضلعی آن کسی قرار نگرفته باشد. در هر مرحله از بازی، ویروس کرونا یک قطر پراکنده از جدول را انتخاب می‌کند که همه‌ی خانه‌های آن خالی باشند (به مجموعه‌ای از  $n$  خانه‌ی جدول قطر پراکنده گفته می‌شود اگر هیچ دو خانه‌ای از آن هم‌سطر یا هم‌ستون نباشند). سپس زاریچ یک خانه‌ی ایمن از این قطر پراکنده را انتخاب می‌کند و یک نفر را روی آن خانه قرار می‌دهد. اگر ویروس کرونا در نوبتش نتواند یک قطر پراکنده‌ی کاملاً خالی پیدا کند می‌بازد. همچنین اگر زاریچ در نوبت خود نتواند از بین خانه‌های قطر پراکنده‌ی پیشنهادی ویروس خانه‌ای ایمن پیدا کند، می‌بازد. اگر هر دو به بهترین نحو بازی کنند، زاریچ به ازای چه  $n$  هایی برنده‌ی بازی خواهد بود؟

## ضد عفونی درخت (۲۰ نمره)

زاربچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، عقیده دارد که برای شکست واقعی این ویروس لازم است درخت‌ها نیز ضد عفونی شوند (حتی اگر مفاهیمی ریاضی باشند).

یک درخت  $n$  رأسی در نظر بگیرید که رأس‌های آن با اعداد  $۱, ۲, \dots, n$  شماره‌گذاری شده باشند. میزان آلودگی هر یال برابر تفاضل شماره‌های رأس‌های دو سرش است. مثلاً یالی که دو رأس با شماره‌های  $۳$  و  $۵$  را به یکدیگر وصل می‌کند دارای آلودگی  $۲$  است. میزان آلودگی یک درخت برابر مجموع آلودگی یال‌هایش است.

زاربچ باید خود را برای پاک‌سازی هر نوع درختی آماده کند. لذا می‌خواهد بداند بیشینه‌ی آلودگی برای یک درخت  $n$  رأسی (با رأس‌های شماره‌گذاری شده از  $۱$  تا  $n$ ) چه قدر است. این مقدار بیشینه را بیابید.

دقت کنید که ابتدا باید این مقدار را به ازای هر  $n$  به دست آورید و یک درخت  $n$  رأسی با بیشینه‌ی آلودگی را توصیف کنید، سپس اثبات کنید که درختی  $n$  رأسی با آلودگی بیشتر از آن وجود ندارد.

## بخش بندی گراف (۲۰ نمره)

زاربیچ که زندگی خود را وقف شکست ویروس کرونا کرده است، از روی نقشه‌ی شهرهای آلوده یک گراف ساده‌ی ۳۰ رأسی ساخته است. او می‌خواهد رأس‌های این گراف را به تعدادی بخش افراز کند، طوری که بین رأس‌های درون هر بخش هیچ یالی وجود نداشته باشد (هر بخش یک مجموعه‌ی مستقل باشد). او پس از بررسی‌های فراوان فهمیده است که می‌تواند رأس‌های گراف را به ۱۰ بخش با شرایط بالا تقسیم کند، اما امکان انجام این کار برای ۹ بخش وجود ندارد.

الف) ثابت کنید گراف زاریچ دوری با حداکثر ۸ رأس دارد. (۱۰ نمره)

ب) ثابت کنید گراف زاریچ دوری با حداکثر ۵ رأس دارد. (۱۰ نمره؛ با حل این بخش، نمره‌ی بخش الف را نیز دریافت می‌کنید.)