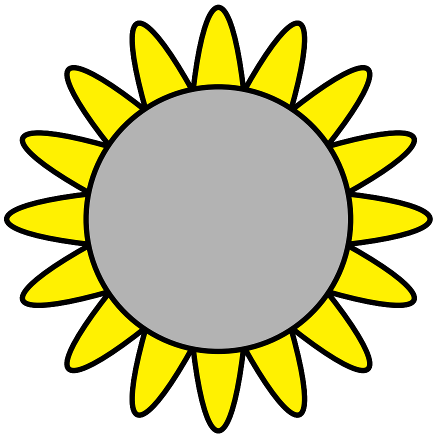
- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۱ تا ۱۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ یک گل آفتاب‌گردان ۱۶ گل‌برگ دارد که در کنار هم، دور تا دور گل را پوشش می‌دهند. پیمان هر مرحله، یک گل‌برگ را از گل جدا می‌کند و به اندازه‌ی تعداد گل‌برگ‌های مجاور جدا نشده‌ی آن گل‌برگ، از آبولف یک تومان پول می‌گیرد. به ترتیب (از سمت راست) حداقل و حداکثر مقدار پولی که پیمان می‌تواند از آبولف بگیرد، چند تومان است؟

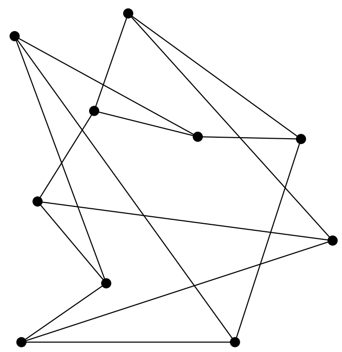


۱) ۱۵ و ۲۴ ۲) ۱۶ و ۱۶ ۳) ۱۲ و ۱۶ ۴) ۱۶ و ۲۴ ۵) ۱۵ و ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

جواب نهایی مسئله ثابت است و ربطی به ترتیب برداشتن گل‌برگ‌ها ندارد. به ازای هر دو گل‌برگ مجاور، گل‌برگی که زودتر برداشته می‌شود، سبب گرفتن یک تومان توسط پیمان (به واسطه‌ی گل‌برگ دیگر) می‌شود. پس پیمان هم‌واره بدون توجه به نحوه‌ی چیدن گل‌برگ‌ها ۱۶ تومان پول می‌گیرد. □

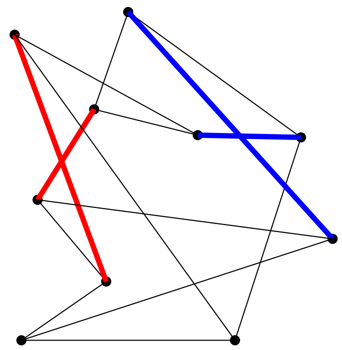
۲ ۱۰ رأس مطابق شکل زیر در صفحه داریم که تعدادی از آن‌ها با یک پاره‌خط به یک‌دیگر وصل شده‌اند. در هر مرحله می‌توانیم یک رأس و تمام پاره‌خط‌های متصل به آن را پاک کرده، سپس آن رأس را در یک نقطه‌ی خالی از صفحه رسم کرده و دوباره با پاره‌خط به همان رأس‌هایی که به این رأس وصل بودند، وصل کنیم. مراحل باید به نحوی انجام شوند که پاره‌خط بین هر دو رأس، از رأس دیگری عبور نکند. کمینه‌ی تعداد مراحل برای آن که در شکل نهایی هیچ دو پاره‌خطی یک‌دیگر را قطع نکنند (جز در نقاط شکل) چیست؟



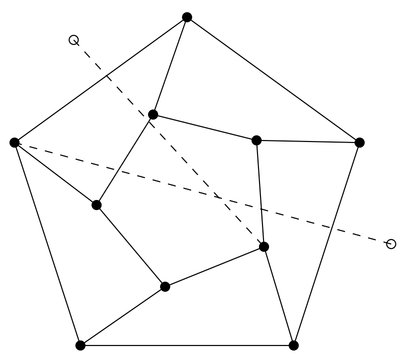
۱) ۲ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۳ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

دو جفت پاره‌خط متقاطع داریم که در هر جابه‌جایی حداکثر یکی از تقاطع‌ها از بین می‌رود. پس حداقل دو حرکت برای از بین بردن آن‌ها نیاز داریم:

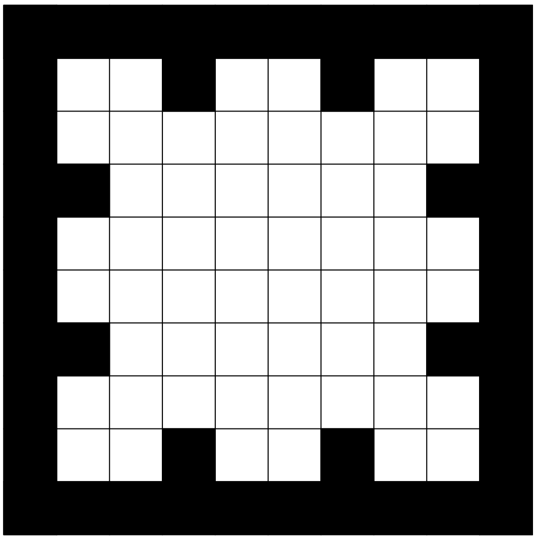


حال مثالی با دو جابه‌جایی ارائه می‌کنیم که در آن هیچ تقاطعی در شکل نهایی باقی نماند:



□

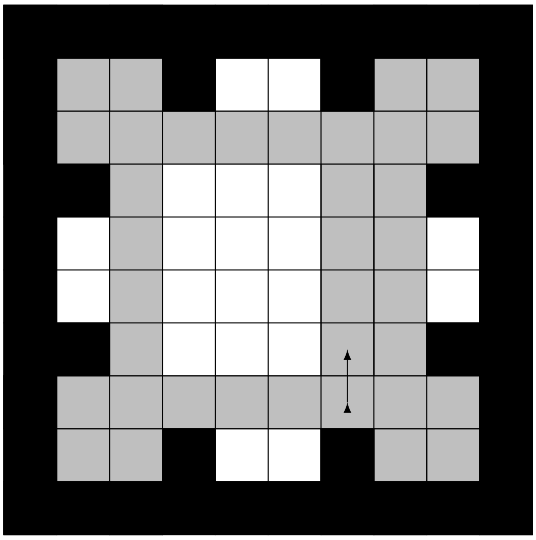
۳ رباتی می‌خواهد ابتدا در یکی از خانه‌های سفید شکل زیر قرار بگیرد. سپس یکی از چهار جهت راست، بالا، چپ و پایین را انتخاب می‌کند و در آن راستا شروع به حرکت می‌نماید. ربات در هر مرحله سعی می‌کند در جهتی که دارد، یک واحد حرکت کند. اگر ربات نتواند این کار را انجام دهد (خانه‌ی بعدی در آن جهت سیاه باشد)، ۹۰ درجه به راست می‌چرخد. ربات حداکثر چند خانه‌ی متفاوت را خواهد دید؟



۱) ۳۸ ۲) ۳۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶ ۵) ۱۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

به ازای هر خانه و جهت آغازین، ربات پس از مدتی در یک دور خواهد افتاد که متناوباً آن را طی خواهد کرد. با بررسی این دورها و حالت آغازین، یکی از حالات بهینه به صورت زیر یافت می‌شود:



□

۴ در شکل زیر می‌خواهیم از خانه‌ی A به خانه‌ی B برویم. در هر مرحله می‌توانیم به یک خانه‌ی مجاور (دارای ضلع مشترک با خانه‌ی کنونی) برویم. برای عبور از هر خانه، باید به مقدار عدد درون آن خانه هزینه بدهیم. کمینه‌ی هزینه‌ی لازم برای رسیدن از A به B چیست؟

۱	۱۴	۲	۱	۳	۱
۲	۱۳	۱	۱۳	۴	۱
۱	A	۱۰۰	B	۵	۱
۳	۱۴	۵	۱۰	۱	۲
۱	۱۳	۴	۲	۱	۱
۲	۳	۱	۱	۱۳	۵

۱) ۲۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷ ۵) ۱۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

مسیری با هزینه‌ی ۲۱ در شکل زیر نشان داده شده است:

۱	۱۴	۲	۱	۳	۱
۲	۱۳	۱	۱۳	۴	۱
۱	A	۱۰۰	B	۵	۱
۳	۱۴	۵	۱۰	۱	۲
۱	۱۳	۴	۲	۱	۱
۲	۳	۱	۱	۱۳	۵

برای اثبات بهینه بودن مسیر بالا، می‌توانید از حالت‌بندی و استدلال منطقی کمک بگیرید. یک راه حل دیگر هم این است که با الگوریتم دایکسترا کمینه‌ی هزینه‌ی مورد نیاز برای رسیدن به هر خانه را به دست آورید که در شکل زیر نوشته شده است:

۴	۱۸	۱۶	۱۷	۲۰	۲۱
۳	۱۳	۱۴	۲۷	۲۴	۲۲
۱	۰	۱۰۰	۲۱	۲۱	۱۹
۴	۱۸	۲۰	۲۴	۱۶	۱۸
۵	۱۸	۱۵	۱۴	۱۵	۱۶
۷	۱۰	۱۱	۱۲	۲۵	۲۱

□

۵ اگر n یک عدد طبیعی باشد، $f(n)$ را تعداد رقم‌های ۱ متوالی سمت راست نمایش دودویی (مبنای ۲) عدد n در نظر می‌گیریم. برای مثال $f(۸) = ۰$ و $f(۱۹) = ۲$. مجموع مقادیر $f(n)$ به ازای n از ۱ تا ۲۵۵ چیست؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۲۴۷ ۳) ۱۲۷ ۴) ۲۵۵ ۵) ۱۲۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

راه یکم: رقم iاُم (از سمت راست) مجموعاً $۲^{۸-i}$ بار در $f(n)$ها اثر داشته است. پس با محاسبه به ازای iهای مختلف پاسخ برابر است با:

$$۲^۷ + ۲^۶ + \ldots + ۲^۰ = ۲۵۵$$

راه دوم: $f(n)$ در حقیقت تعداد عوامل ۲ در عدد $n + ۱$ است. پس باید مجموع تعداد عوامل ۲ اعداد ۲ تا ۲۵۶ را به دست آوریم که برابر است با:

$$\lfloor \frac{۲۵۶}{۲^۱} \rfloor + \lfloor \frac{۲۵۶}{۲^۲} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{۲۵۶}{۲^۸} \rfloor = ۲۵۵$$

□

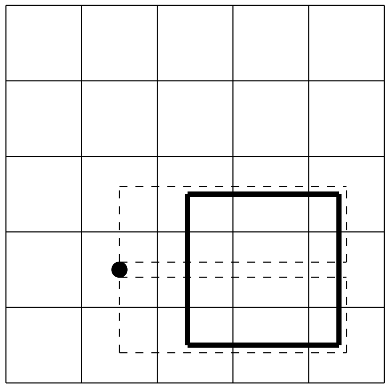
۶ به چند طریق می‌توان برخی از خانه‌های یک جدول ۵×۵ را علامت زد، طوری که در هر زیرجدول ۴×۲ و ۲×۴ دقیقاً یک خانه‌ی علامت‌دار و در هر زیرجدول ۳×۳ حداقل یک خانه‌ی علامت‌دار وجود داشته باشد؟

۱) ۹ ۲) ۰ ۳) ۱ ۴) ۸ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

●				●
		●		
●				●

از هر خانه (جز خانه‌های علامت زده شده) می‌توان دو زیرجدول هم‌شکل کشید که این خانه در هردوی آن‌ها در گوشه‌ی زیرجدول قرار دارد. در این دو زیرجدول نباید هیچ خانه‌ی سیاه دیگری باشد. در این صورت یک مربع ۳×۳ ایجاد می‌شود که در آن هیچ خانه‌ی سیاهی نیست.



پس تنها در خانه‌های شکل اول را می‌توان علامت‌دار کرد که در این صورت تنها یک حالت برای علامت‌گذاری وجود دارد.

□

۷ حداکثر چند مکعب واحد از یک مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ را می‌توان رنگ کرد، به طوری که در هر زیرمکعب $۲ \times ۲ \times ۲$ حداکثر یک مکعب واحد رنگ شده باشد؟

۱) ۲۵ ۲) ۳۰ ۳) ۱۸ ۴) ۲۷ ۵) ۲۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

جواب برای یک مکعب $۵ \times ۵ \times ۵$ کمتر مساوی یک مکعب $۶ \times ۶ \times ۶$ است. از آن‌جا که در یک مکعب $۶ \times ۶ \times ۶$ تنها ۲۷ مکعب $۲ \times ۲ \times ۲$ قرار دارد، حداکثر ۲۷ خانه‌ی رنگی خواهیم داشت. حال برای ارائه‌ی یک روش با ۲۷ خانه‌ی رنگ‌شده، سطر، ستون و ارتفاع مکعب‌های واحد را به ترتیب از ۱ تا ۵ شماره‌گذاری می‌کنیم و تمام خانه‌هایی که هر ۳ عضو مختصات آن‌ها عددی فرد است را رنگ می‌کنیم. □

۸ منظور از $f(x)$ باقی‌مانده‌ی عدد x در تقسیم بر ۲ است. برای مثال $f(۱۵) = ۱$. فرض کنید دو عدد صحیح a و b را داریم. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

۱. اگر دو عدد a و b برابر بودند، به مرحله‌ی ۶ برو.
۲. اگر $a > b$، آن‌گاه مقادیر a و b را جابه‌جا کن.
۳. مقدار a را برابر $a + ۳$ قرار بده.
۴. مقدار b را برابر $b - f(b)$ قرار بده.
۵. به مرحله‌ی ۱ برو.
۶. پایان.

به چند طریق می‌توانیم اعداد آغازین الگوریتم (a و b) را با شرط $۱ \leqslant a < b \leqslant ۲۰$ انتخاب کنیم، طوری که الگوریتم پس از تعدادی مرحله به پایان برسد؟

۱) ۸۵ ۲) ۳۰ ۳) ۶۰ ۴) ۵۴ ۵) ۵۷

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حالت‌بندی روی زوج یا فرد بودن عدد بزرگ‌تر می‌توانید بررسی کنید که اگر زمانی عدد کوچک‌تر آغازین، بزرگ‌تر از عدد دیگر شود، دو عدد هرگز برابر نخواهند شد. پس اگر عدد بزرگ‌تر آغازین k باشد، تعداد حالت‌های مطلوب برای عدد کوچک‌تر $\lceil \frac{k-f(k)}{3} - 1 \rceil$ خواهد شد (زیرا باقی‌مانده‌ی عدد کوچک‌تر در تقسیم بر ۳ باید برابر باقی‌مانده‌ی $k - f(k)$ در تقسیم بر ۳ باشد). با شمارش تمام حالات به ازای kهای مختلف، پاسخ ۵۴ به دست می‌آید. □

۹ ۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می‌خواهیم ۱۰ میوه‌ی یکسان را بین آن‌ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم‌زمان هر فرد میوه‌دار، یکی از میوه‌هایش را خورده و بقیه را به نفر راستی‌اش می‌دهد (اگر کسی نفر سمت راستی نداشته باشد، خودش بقیه‌ی میوه‌هایش را نیز می‌خورد). به چند طریق در ابتدا می‌توانیم میوه‌ها را تقسیم کنیم، طوری که پس از خورده شدن تمام میوه‌ها، هر فرد دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۱) ۸۹　　۲) ۵۱۲　　۳) ۷۲۰　　۴) ۲۴۳　　۵) ۳۴۳

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

با تعیین این که هر نفر میوه‌اش را خودش از ابتدا داشته باشد یا این که از دیگران بگیرد (دو حالت)، تقسیم میوه‌ها به صورت یکتا معین می‌گردد. پس $۵۱۲ = ۲^۹$ حالت داریم. □

۱۰ ۱۰ نفر در یک ردیف داریم و می‌خواهیم ۱۰ میوه‌ی یکسان را بین آن‌ها تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً یک میوه برسد). هر مرحله، به طور هم‌زمان هر فرد میوه‌دار کارهای زیر را به ترتیب نجام می‌دهد:

۱. یکی از میوه‌هایش را می‌خورد.
۲. در صورتی که هنوز میوه‌ای داشته باشد، یکی از میوه‌هایش را به نفر سمت راستش می‌دهد (اگر نفر سمت راستی نداشته باشد، آن میوه را خودش می‌خورد).
۳. در صورتی که هنوز میوه‌ای داشته باشد، تمام میوه‌های باقی‌مانده را به نفر سمت چپش می‌دهد (اگر نفر سمت چپ نداشته باشد، آن میوه‌ها را خودش می‌خورد).

به چند طریق در ابتدا می‌توانیم میوه‌ها را تقسیم کنیم، طوری که در انتها هر کس دقیقاً یک میوه خورده باشد؟

۱) ۲۷۴　　۲) ۱۴۹　　۳) ۱۴۴　　۴) ۸۹　　۵) ۲۵۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

تعداد حالت‌های تقسیم n میوه بین n نفر را با a_n نشان می‌دهیم. نفر سمت چپ حداکثر دو میوه در ابتدا دارد (در غیر این صورت خودش حداقل دو میوه می‌خورد). روی تعداد میوه‌های نفر سمت چپ (در ابتدا) حالت‌بندی می‌کنیم:

- نفر سمت چپ دو میوه داشته باشد؛ در این صورت او و نفر سمت راستش همین دو میوه را خواهند خورد. بقیه باید بین خودشان حالت معتبری داشته باشند که a_{n-2} حالت دارد.
- نفر سمت چپ یک میوه داشته باشد؛ در این صورت او این میوه را خواهد خورد. بقیه باید بین خودشان حالت معتبری داشته باشند که a_{n-1} حالت دارد.

- نفر سمت چپ میوه‌ای نداشته باشد؛ در این صورت میوه‌ی میل شده توسط او در انتها، باید در ابتدا در اختیار نفر سمت راستش باشد و در همان مرحله‌ی آغازین به او برسد (در غیر این صورت یکی از افراد، بیش از یک میوه خواهد خورد). پس حالات، متناظر حالات معتبر مسئله برای $n-۱$ نفر است، طوری که نفر سمت چپ (بین $n-۱$ نفر) دقیقاً سه میوه در ابتدا داشته باشد. در این حالت $n-۳$ نفر سمت راست، باید حالتی معتبر بین خودشان داشته باشند.

بنابراین داریم:

$$a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲} + a_{n-۳}$$

از آن جایی که $a_۰ = ۱$، $a_۱ = ۱$ و $a_۲ = ۲$ مقدار $a_{۱۰} = ۲۷۴$ به دست می‌آید. □

در یک جدول، خانه‌ی واقع در سطر iاُم و ستون jاُم جدول را با (i, j) نشان می‌دهیم. **فاصله‌ی سلماسی** دو خانه‌ی $(r_۱, c_۱)$ و $(r_۲, c_۲)$ در جدول را برابر با $|r_۱ - r_۲| + |c_۱ - c_۲|$ در نظر می‌گیریم.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ در یک جدول ۵×۵ به ازای هر دو خانه از جدول، فاصله‌ی سلماسی آن‌ها را حساب می‌کنیم و سپس تمام این فاصله‌های حساب شده را با هم جمع می‌کنیم. حاصل جمع به دست آمده کدام است؟

۱) ۱۰۰۰　۲) ۲۵۰　۳) ۲۰۰　۴) ۷۵۰　۵) ۵۰۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

جابجایی کل در راستای افقی برابر با جابجایی کل در راستای عمودی است. حال برای محاسبه‌ی جابجایی در راستای افقی، به ازای یک مقدار دلخواه X کافیست تعداد جفت خانه‌هایی را حساب کنیم که در حین رفتن از اولی به دومی، مولفه‌ی x آن‌ها لحظه‌ای برابر X بوده است. برای محاسبه تعداد این جفت‌ها کافیست تعداد جفت‌هایی مثل (i, j) را حساب کنیم که $x_i \leqslant X < x_j$ است که تعداد این خانه‌ها برابر با

$$(۵ \times x_i) \times (۵ \times (۵ - x_i)) = ۲۵ \times x_i \times (۵ - x_i)$$

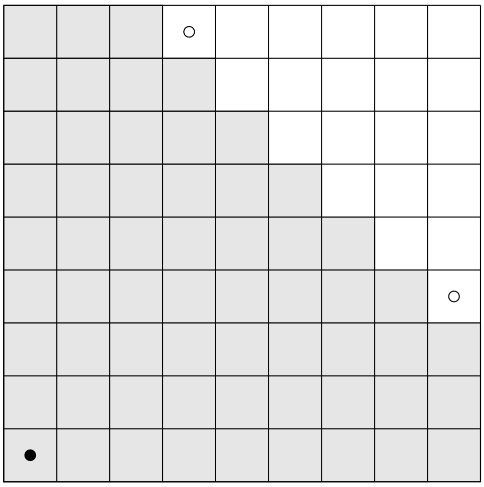
است که جمع این عبارت به ازای $۱ \leqslant X \leqslant ۵$ برابر با ۵۰۰ است؛ پس جواب برای هر دو مولفه، برابر با $۲ \times ۵۰۰ = ۱۰۰۰$ خواهد بود. □

۱۲ افروز در یک جدول ۹×۹ سه خانه را علامت می‌زند. فاصله‌ی سلماسی نزدیک‌ترین جفت از این سه خانه‌ی علامت‌دار (از نظر فاصله‌ی سلماسی)، حداکثر چه‌قدر است؟

۱) ۱۱　۲) ۸　۳) ۱۲　۴) ۱۰　۵) ۹

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با حرکت دادن هر سه خانه در یک راستا می‌توان کاری کرد که یکی از نقاط در یکی از چهار گوشه‌ی مربع باشند. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم این گوشه در قسمت پایین راست شکل قرار دارد.



برای اینکه جواب بیشتر از ۱۰ شود، نباید هیچ نقطه‌ی دیگری در ناحیه‌ی رنگ‌شده قرار داشته باشد. خارج از ناحیه‌ی رنگ شده نیز دورترین جفت خانه از هم، دو خانه‌ی علامت‌دار هستند که فاصله‌ی آن‌ها نیز برابر ۱۰ است.
□

فرض کنید دنباله‌ای از اعداد داریم. در هر مرحله می‌توان یکی از سه عملیات زیر را روی دنباله انجام داد:

- دستور $copy$: با دستور $copy(i)$ یک عدد با مقدار iاُمین عضو دنباله به انتهای دنباله اضافه می‌شود. برای مثال اگر دنباله‌ی $\langle ۱, ۲, ۷, ۳ \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $copy(۲)$ به دنباله‌ی $\langle ۷, ۱, ۲, ۷, ۳ \rangle$ می‌رسیم.
- دستور $delete$: با دستور $delete(i)$ عدد iاُم دنباله حذف می‌شود. برای مثال اگر دنباله‌ی $\langle ۵, ۲, ۹, ۱, ۴ \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $delete(۲)$ به دنباله‌ی $\langle ۵, ۲, ۹, ۴ \rangle$ می‌رسیم.
- دستور $merge$: با دستور $merge(i, j)$ عدد jاُم دنباله حذف شده و مقدار آن به عدد iاُم دنباله اضافه می‌شود. در این دستور باید $j > i$ باشد. برای مثال اگر دنباله‌ی $\langle ۵, ۲, ۹, ۱, ۴ \rangle$ را داشته باشیم، با دستور $merge(۲, ۴)$ به دنباله‌ی $\langle ۵, ۹, ۳, ۴ \rangle$ می‌رسیم.

اجرای هر یک از دستورهای بالا یک واحد هزینه دارد. متغیر $size$ در هر لحظه تعداد عضوهای دنباله را نشان می‌دهد. برای مثال وقتی دنباله‌ی $\langle ۱, ۱۰, ۶, ۳ \rangle$ را داریم، $size = ۴$ است.

با توجه به توضیحات بالا به ۳ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ فرض کنید در ابتدا دنباله‌ی $\langle ۱۰۰, \ldots, ۲, ۱ \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، مجموع اعضای دنباله چه خواهد بود؟

۱. اگر $size < ۳$ است، به گام ۵ برو.
۲. $delete(size - ۱)$
۳. $merge(size - ۱, size)$
۴. به گام ۱ برو.
۵. پایان.

۱) ۲۵۰۱ ۲) ۵۰۵۱ ۳) ۲۵۵۰ ۴) ۲۵۵۱ ۵) ۴۹۵۱

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هر مرحله عدد یکی مانده به آخر حذف شده و پس از آن دو عدد انتهایی ادغام می‌گردند. پس به ترتیب دنباله‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\langle ۱, ۲, \ldots, ۹۹, ۱۰۰ \rangle$$

$$\langle ۱, ۲, \ldots, ۹۷, ۹۸ + ۱۰۰ \rangle$$

$$\langle ۱, ۲, \ldots, ۹۵, ۹۶ + ۹۸ + ۱۰۰ \rangle$$

$$\ldots$$

$$\langle ۱, ۲ + ۴ + \ldots + ۱۰۰ \rangle$$

پس پاسخ برابر است با:

$$۱ + (۲ + ۴ + ۶ + \ldots + ۱۰۰) = ۱ + ۲ \times \frac{۵۰ \times ۵۱}{۲} = ۲۵۵۱$$

□

۱۴ فرض کنید در ابتدا دنباله‌ی $\langle ۱, ۰ \rangle$ را داریم. پس از اجرای الگوریتم زیر، عنصر آخر دنباله چه خواهد بود؟

۱. به ازای i از ۱ تا ۱۰ انجام بده:

۱ـ۱. $copy(size - ۱)$

۱ـ۲. $copy(size - ۱)$

۱ـ۳. $merge(size - ۱, size)$

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۱۴۴ ۳) ۵۱۲ ۴) ۲۵۶ ۵) ۸۹

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

هر بار جمع دو عنصر آخر دنباله به انتهای دنباله اضافه می‌شود و روندی مشابه دنباله‌ی فیبوناچی طی خواهد شد. بنابراین در انتها به دنباله‌ی زیر می‌رسیم که عنصر آخر آن ۱۴۴ است:

$$\langle ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹ \rangle$$

□

۱۵ فرض کنید در ابتدا دنباله‌ی $\langle ۱ \rangle$ را داریم و می‌خواهیم با یک برنامه به دنباله‌ی $\langle ۱, ۲, \ldots, ۱۰۰ \rangle$ برسیم. کمینه‌ی هزینه‌ی (تعداد اجراهای دستورهای) مورد نیاز چیست؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۳۰۰ ۳) ۹۹ ۴) ۱۹۸ ۵) ۲۹۷

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

الگوریتم زیر، هزینه‌ی ۹۷×۳ دارد و به درستی کار می‌کند:

۱. به ازای i از ۲ تا ۱۰۰ انجام بده:

۱ـ۱. $copy(۱)$

۱ـ۲. $copy(size - ۱)$

۱ـ۳. $merge(size - ۱, size)$

حال ثابت می‌کنیم نمی‌توان الگوریتمی با هزینه‌ی کم‌تر ارائه کرد. ساختن یک عدد متمایز با اعداد کنونی دنباله تنها با عمل $merge$ امکان‌پذیر است. پس باید دست کم ۹۹ عمل $merge$ داشته باشیم. از طرفی اضافه کردن تعداد عناصر دنباله تنها با عمل $copy$ امکان‌پذیر است. پس با توجه به این که دست کم ۹۹ عمل $merge$ داریم، باید دست کم ۹۹×۲ عمل $copy$ نیز داشته باشیم تا تعداد عناصر دنباله به ۱۰۰ برسد. پس دست کم $۲۹۷ = ۹۷ \times ۳$ مرحله نیاز داریم. □