- زمان آزمون ۹۰ دقیقه است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است. حتماً کد دفترچه را وارد پاسخ‌نامه کنید.
- سوالات ۱۴ تا ۱۵ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.

---

۱ فرض کنید $A_0 = \varnothing$، و به ازای هر عدد طبیعی n، داشته باشیم $A_n = \{\varnothing, \{A_{n-1}\}\}$. برای مثال $A_1 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. در عبارتی که برای نمایش A_{10} نوشته می‌شود، اگر به جای هر علامت «$\varnothing$»، عبارت «$\{\}$» را جایگزین کنیم، رشته‌ی حاصل چند علامت «$\}$» خواهد داشت؟

۱) ۳۱ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۲۱ ۴) ۲۲ ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

p_n را تعداد علامت‌های «$\{$» در A_n در نظر می‌گیریم. می‌دانیم $p_0 = 1$ است و هم‌چنین به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$p_n = p_{n-1} + 3$$

بنابراین $p_n = 1 + 3n$ و در نتیجه پاسخ برابر است با $p_{10} = 31$. □

۲ به یک عبارت ریاضی **ساده** گوییم، اگر تنها از اعداد طبیعی، دو عمل جمع و ضرب، و پرانتز ساخته شده باشد (لزومی ندارد از تمام موارد گفته شده استفاده شده باشد). فرض کنید مجموع تمام اعدادِ به‌کار رفته در یک عبارت ریاضی ساده، برابر ۸ باشد. اگر تمام اعداد این عبارت را در ۲ ضرب کنیم، حاصل عبارت حداکثر می‌تواند چند برابر شود؟

۱) ۲۵۶ ۲) ۵۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۶ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

به ازای هر عبارت ساده‌ی e، مقدار $f(e)$ را برابر عبارت حاصل از e (پس از ۲ برابر کردن اعداد آن) در نظر می‌گیریم.
ابتدا ثابت می‌کنیم آخرین عمل عبارت ساده‌ی بهینه (به ترتیب انجام اعمال در هنگام محاسبه)، عمل ضرب است. فرض کنید عبارت ساده‌ای به صورت $x + y$ است (که خود x و y نیز، عباراتی ساده هستند). از آن‌جایی که $f(x) > x$ و $f(y) > y$ داریم:

$$xf(x)f(y) > xf(x)y, \qquad yf(y)f(x) > yf(y)x$$

با جمع کردن دو نابرابری بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&xf(x)f(y) + yf(y)f(x) > xf(x)y + yf(y)x\\
\Longrightarrow&(x+y)\big(f(x)f(y)\big) > xy\big(f(x)+f(y)\big)\\
\Longrightarrow&\frac{f(x)\times f(y)}{x\times y} > \frac{f(x)+f(y)}{x+y}
\end{aligned}$$

پس جایگزینی عبارت $x + y$ با $x \times y$ نسبتی بزرگ‌تر می‌سازد. با همین استدلال، می‌توان نتیجه گرفت تمام اعمال عبارت بهینه، ضرب هستند. با توجه به این که تعداد اعداد عبارت حداکثر ۸ است، عبارت حاصل حداکثر $۲^۸ = ۲۵۶$ برابر عبارت اولیه می‌تواند باشد.
از طرفی عبارت زیر، نسبت ۲۵۶ را برای ما می‌سازد:

$$۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱$$

پس پاسخ برابر ۲۵۶ است. □

۳ **سنگ، کاغذ، قیچی** یک بازی معروف دو نفره است که به شکل زیر انجام می‌شود:

> هر بازیکن یک دستش را به یکی از سه شکل سنگ، کاغذ و قیچی در می‌آورد (دو بازیکن به طور هم‌زمان این کار را انجام می‌دهند). اگر هر دو بازیکن یک شکل را انتخاب کرده باشند، نتیجه‌ی بازی مساوی می‌شود؛ در غیر این صورت، برنده به صورت زیر مشخص می‌گردد:
>
> - اگر یک دست به شکل سنگ و دست دیگر به شکل قیچی باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل سنگ است.
> - اگر یک دست به شکل قیچی و دست دیگر به شکل کاغذ باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل قیچی است.
> - اگر یک دست به شکل کاغذ و دست دیگر به شکل سنگ باشد، برنده‌ی بازی کسی است که دستش به شکل کاغذ است.

۶ نفر با شماره‌های ۱ تا ۶ به ترتیب از راست به چپ در یک ردیف ایستاده‌اند. به ازای هر $۱ \leqslant i \leqslant ۵$، دست چپ نفر شماره‌ی i با دست راست نفر شماره‌ی $i + ۱$ بازی سنگ، کاغذ، قیچی را (دقیقاً یک مرتبه) انجام می‌دهد. یک نفر **خسته‌کننده** نامیده می‌شود، اگر نتیجه‌ی هر دو بازی‌اش یکسان شود (یعنی هر دو بازی را ببرد، یا هر دو بازی را ببازد، یا هر دو بازی‌اش مساوی شود). نفرات با شماره‌های ۱ و ۶ (که تنها یک بازی انجام می‌دهند)، خسته‌کننده محسوب نمی‌شوند. در چند حالت متمایز از انجام بازی‌ها، فرد خسته‌کننده‌ای وجود ندارد؟ دو حالت از انجام بازی‌ها را متمایز در نظر می‌گیریم، اگر دستی باشد که در این دو حالت، دو شکل مختلف (از سه شکل سنگ، کاغذ، و یا قیچی) را انتخاب کرده باشد.

۱) ۲۳۳۲۸ ۲) ۱۱۶۶۴ ۳) ۷۲۹ ۴) ۶۹۹۸۴ ۵) ۷۷۷۶

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

هر بازی $۹ = ۳ \times ۳$ حالت برای انجام دارد. بازی اول (بین نفرات شماره ۱ و شماره ۲) ۹ حالت دارد. به ازای هر $۲ \leqslant i \leqslant ۵$ بازی iاُم (بین نفرات شماره i و شماره $i + ۱$) ۶ حالت دارد (تا نتیجه‌ی برابر با بازی $i - ۱$اُم نداشته باشد). پس پاسخ برابر است با:

$$۹ \times ۶^۴ = ۱۱۶۶۴$$

□

۴ در یک مرغ‌داری، برای باز شدن هر تخم‌مرغ و در آمدن جوجه از آن باید تعدادی نوک به آن زده شود (این مقدار به میزان استحکام پوست تخم‌مرغ بستگی دارد). ۷ تخم‌مرغ داریم که به ترتیب به ۰، ۱، ۲، ... و ۶ نوک برای باز شدن نیاز دارند. می‌خواهیم این تخم‌مرغ‌ها را در یک ردیف بچینیم. در هر مرحله، یکی از تخم‌مرغ‌هایی که به ۰ نوک نیاز دارد، باز می‌شود و جوجه از آن بیرون می‌آید؛ سپس جوجه‌ی بیرون آمده به تمام تخم‌مرغ‌های سمت راست‌ش در ردیف ۲ نوک می‌زند (اگر تخم‌مرغی به کم‌تر از ۲ نوک نیاز داشته باشد، به همان مقدار مورد نیاز به آن نوک زده می‌شود). در چند ترتیب اولیه از تخم‌مرغ‌ها در ردیف مذکور، تمام تخم‌مرغ‌ها جوجه خواهند شد؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲۰ ۳) ۷۲۰ ۴) ۱۴۴ ۵) ۹۶

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

در هر لحظه، ترتیب باز شدن تخم‌مرغ‌هایی که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند، قابل صرف نظر کردن است (و اگر قرار باشد تمام تخم‌مرغ‌ها جوجه شوند، با هر ترتیبی از اجرا، این امر محقق خواهد شد). پس فرض می‌کنیم تخم‌مرغ‌های مستعد برای باز شدن، به ترتیب از چپ به راست باز می‌شوند.
تخم‌مرغ سمت چپ ردیف، باید آن تخم‌مرغی باشد که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارد (در غیر این صورت جوجه نخواهد شد). پس از جوجه شدن این تخم‌مرغ، تخم‌مرغ‌های دیگر به ترتیب به ۰، ۰، ۱، ۲، ۳ و ۴ نوک برای باز شدن نیاز دارند. تخم‌مرغ دوم ردیف، باید از بین دو تخم‌مرغی انتخاب شود که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند (۲ حالت). با جوجه شدن تخم‌مرغ دوم، تخم‌مرغ‌های دیگر به ترتیب به ۰، ۰، ۰، ۱ و ۲ نوک برای باز شدن نیاز دارند. تخم‌مرغ سوم باید از بین سه تخم‌مرغی انتخاب شود که به ۰ نوک برای جوجه شدن نیاز دارند (۳ حالت). با جوجه شدن تخم‌مرغ سوم، همه‌ی تخم‌مرغ‌های دیگر برای باز شدن آماده هستند و ترتیب آن‌ها !۴ حالت دارد. پس پاسخ برابر است با: $۲ \times ۳ \times ۴! = ۱۴۴$ □

۵ جدول زیر از ۸ سطر و ۸ ستون با شماره‌های ۱ تا ۸ تشکیل شده است:

۸								
۷								
۶								
۵								
۴								
۳								
۲								
۱								
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

به دو خانه **مجاور** می‌گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. هر گاه از خانه‌ی پایین-چپ جدول آغاز کنیم،

هر مرحله به خانه‌ی مجاور راستی یا خانه‌ی مجاور بالایی برویم و در پایان به خانه‌ی بالا-راست جدول برسیم، یک مسیر **استاندارد** را طی کرده‌ایم.
به ازای هر $۱ \leqslant i, j \leqslant ۸$، ارزش خانه‌ی واقع در سطر i و ستون j برای کیوان $i + j$، و برای پیمان $i - j$ است (ارزش برخی از خانه‌ها برای پیمان منفی می‌شود). برای هر یک از این دو نفر، ارزش یک مسیر استاندارد، برابر مجموع ارزش خانه‌های آن مسیر برای آن شخص است. میانگین ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان و پیمان به ترتیب (از راست به چپ) چیست؟

۱) ۱۳۶ و ۰ ۲) ۲۷۲ و ۳۶− ۳) ۱۳۵ و ۰ ۴) ۲۷۲ و ۰ ۵) ۳۶ و ۳۶−

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ارزش تمام مسیرهای استاندارد برای کیوان برابر $۱۳۵ = ۱ - \frac{۱۶ \times ۱۷}{۲} = ۱۶ + \ldots + ۳ + ۲$ است، زیرا ارزش خانه‌ی مبدأ ۲ بوده و با طی کردن هر گام در مسیر، به ارزش خانه دقیقاً یک واحد اضافه می‌شود. پس میانگین ارزش مسیرهای استاندارد برای پیمان ۰ است.
برای هر مسیر استاندارد، **دوست** آن را مسیری استاندارد تعریف می‌کنیم که از قرینه کردن مسیر نسبت به قطر اصلی جدول به دست می‌آید. ارزش دوست هر مسیر استاندارد برای پیمان، قرینه‌ی ارزش خود آن مسیر برای پیمان است. بنابراین مسیرها به جفت‌هایی افراز می‌شوند که مجموع ارزش آن‌ها برای پیمان ۰ است. پس میانگین ارزش مسیرهای استاندارد برای پیمان ۰ می‌باشد. □

۶ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا n **ابرزوج** می‌گوییم، اگر مجموع هر ۳ عدد متوالی در آن زوج باشد. بیشینه‌ی n را بیابید، به نحوی که جایگشتی ابرزوج از اعداد ۱ تا n وجود داشته باشد.

۱) ۵ ۲) ۹ ۳) ۱۱ ۴) ۷ ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

با مشخص شدن زوجیت دو عنصر ابتدای دنباله، زوجیت بقیه‌ی عناصر به صورت یکتا تعیین می‌شود. روی زوجیت دو عنصر آغازین دنباله حالت‌بندی می‌کنیم:

- دو عنصر آغازین، هر دو زوج باشند؛ در این صورت تمام عناصر دنباله باید زوج باشند که امکان ندارد (زیرا عدد ۱ حتماً باید در دنباله موجود باشد).
- دو عنصر آغازین دنباله، هر دو فرد باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \ldots \rangle$$

  در الگوی بالا از عنصر چهارم به بعد، همواره تعداد اعداد فرد دنباله (از ابتدای دنباله تا آن عنصر)، حداقل دو تا بیش‌تر از تعداد اعداد زوج آن است. اما در اعداد ۱ تا n تعداد اعداد فرد حداکثر یکی بیش‌تر از تعداد اعداد زوج است. پس الگوی بالا حداکثر به ازای $n = ۳$ می‌تواند ممکن باشد.
- دو عنصر آغازین دنباله به ترتیب فرد و زوج باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \ldots \rangle$$

در این الگو مانند استدلال حالت قبل، حداکثر تا عنصر پنجم پیش خواهیم رفت و n نمی‌تواند از ۵ بیش‌تر باشد.

- دو عنصر آغازین دنباله به ترتیب زوج و فرد باشند؛ در این صورت زوجیت عناصر دنبال به صورت زیر خواهد بود:

$$\langle \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \text{فرد}, \text{فرد}, \text{زوج}, \ldots \rangle$$

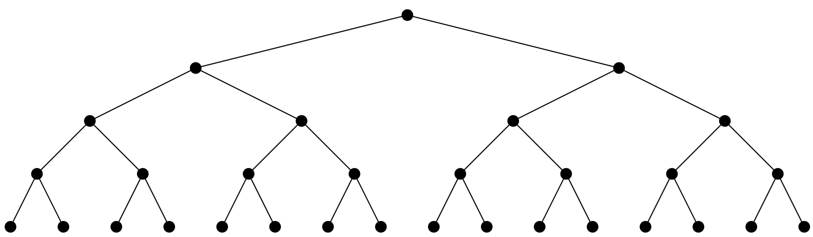
در این الگو مانند استدلال حالت قبل، حداکثر تا عنصر هفتم پیش خواهیم رفت و n نمی‌تواند از ۷ بیش‌تر باشد.

ثابت کردیم n نمی‌تواند از ۷ بیش‌تر باشد. برای $n = ۷$ نیز جایگشت زیر، شرایط مسئله را دارد:

$$\langle ۲, ۱, ۳, ۴, ۵, ۷, ۶ \rangle$$

□

۷ شکل زیر از ۳۱ رأس (نقطه) متمایز و ۳۰ یال (پاره‌خط) ساخته شده است.



فاصله‌ی دو رأس برابر کم‌ترین تعداد یال‌های مورد نیاز برای رفتن از یکی به دیگری است. فاصله‌ی چند جفت رأس در این شکل برابر ۵ است؟ دقت کنید برای دو رأس a و b، جفت (a, b) و (b, a) یکسان محسوب می‌شوند.

۱) ۱۶   ۲) ۹۶   ۳) ۱۲۸   ۴) ۶۴   ۵) ۸۰

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

دو رأس مد نظر نمی‌توانند هم‌عمق باشند (زیرا فاصله‌ی آن‌ها فرد است). روی رأس با عمق کم‌تر حالت‌بندی می‌کنیم:

- رأس بالایی، ریشه (در عمق ۰) باشد؛ این حالت امکان ندارد، زیرا رأس دیگر باید در عمق ۵ باشد، اما حداکثر عمق رأس‌ها ۴ است.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۱ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۲ حالت و انتخاب رأس دیگر ۸ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۲ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۴ حالت و انتخاب رأس دیگر ۴ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۳ باشد؛ در این صورت انتخاب خود رأس ۸ حالت و انتخاب رأس دیگر ۴ حالت دارد.
- رأس بالایی، رأسی در عمق ۴ یا ۵ باشد؛ این حالت امکان ندارد، زیرا رأس‌های با فاصله‌ی ۵ از این رأس‌ها، در عمق‌های کم‌تر قرار دارند.

پس پاسخ برابر

$$۱۶ + ۱۶ + ۳۲ = ۶۴$$

است. □

۸ ۱۰ دانش‌آموز یک مدرسه در صفی ایستاده‌اند و روی سر هر کدام از آن‌ها کلاهی قرمز یا آبی قرار دارد. ناظم در هر مرحله، یکی از دانش‌آموزان صف را از صف خارج کرده و به کلاس می‌فرستد. نحوه‌ی انتخاب دانش‌آموز توسط ناظم در هر مرحله به شکل زیر است:

> اگر تنها یک نفر در صف باشد، همان فرد انتخاب می‌شود؛ در غیر این صورت (در صورت وجود حداقل دو نفر در صف)، اگر نفر اول صف کلاه آبی و نفر دوم کلاه قرمز داشته باشند، نفر دوم صف، و در غیر این صورت، نفر اول صف انتخاب می‌شود.

پس از ۱۰ مرحله، تمام دانش‌آموزان صف به کلاس می‌روند. یک دنباله از رنگ‌های قرمز و آبی را به این صورت می‌سازیم که از یک دنباله‌ی خالی شروع می‌کنیم و به ازای هر دانش‌آموزی که از صف خارج شد، رنگ کلاه او را در انتهای دنباله اضافه می‌کنیم. به دنباله‌ی ۱۰ عنصری حاصل **دنباله‌ی سلطانی** صف می‌گوییم. تمام $۲^{۱۰}$ حالت اولیه برای رنگ کلاه‌های دانش‌آموزان صف، روی هم چند دنباله‌ی سلطانی متمایز تولید می‌کنند؟

۱) ۱۰۲۴ ۲) ۵۱۳ ۳) ۱۴۴ ۴) ۵۱۲ ۵) ۱۲۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

می‌توانیم فرض کنیم اگر کلاه نفر اول صف آبی است، نفر دوم انتخاب می‌شود (مگر این که فقط یک نفر در صف باقی مانده باشد). اگر حداقل یک کلاه آبی موجود باشد، قطعاً عنصر آخر دنباله آبی خواهد بود. از طرفی تمام دنباله‌هایی که عنصر آخرشان آبی است، قابل تولید هستند؛ زیرا کافی است به نفر اول صف کلاه آبی بدهیم (متناظر عنصر آخر دنباله) و به بقیه، به ترتیب سایر اعضای دنباله کلاه متناظر را بدهیم. یک حالت مطلوب نیز این است که تمام کلاه‌ها قرمز باشد. پس پاسخ برابر $۵۱۳ = ۱ + ۲^۹$ است. □

۹ می‌خواهیم ۲۰ جایزه با ارزش‌های $۲^۰$، $۲^۱$، ... و $۲^{۱۹}$ را بین ۱۰ بچه تقسیم کنیم (لزومی ندارد به هر نفر دقیقاً ۲ جایزه برسد؛ حتی ممکن است به یک نفر هیچ جایزه‌ای نرسد). هر بچه به میزان مجموع ارزش جایزه‌های دریافتی‌اش خوشحال می‌شود. پس از پخش جایزه‌ها، به خوشحال‌ترین بچه، **شنگول** و به بچه‌ای که کم‌ترین خوشحالی را دارد، **منگول** می‌گوییم. کمینه‌ی اختلاف خوشحالی شنگول و منگول چه‌قدر است؟

۱) ۵۲۲۲۴۱ ۲) ۱۰۲۴ ۳) ۵۲۲۷۵۳ ۴) ۴۲۵۷۰۰ ۵) ۳۲۵۲۳

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

فردی که جایزه‌ی با ارزش $۲^{۱۹}$ را دریافت می‌کند، A در نظر بگیرید. با توجه به وجود ۱۰ نفر، قطعاً فردی وجود دارد که هیچ یک از ۹ جایزه‌ی با ارزش‌های $۲^{۱۱}$ تا $۲^{۱۹}$ را دریافت نمی‌کند؛ یکی از این افراد را در نظر گرفته و B بنامید. اختلاف خوشحالی A و B حداقل

$$۲^{۱۹} - (۲^۰ + \ldots + ۲^{۱۰}) = ۲^{۱۹} - (۲^{۱۱} - ۱) = ۵۲۲۲۴۱$$

است. از طرفی اگر جایزه‌های با ارزش‌های $۲^{۰}$ تا $۲^{۱۰}$ را به یک نفر، و هر یک از جایزه‌های دیگر را به نفراتی جداگانه بدهیم، مقدار بالا محقق می‌شود. پس پاسخ برابر ۵۲۲۲۴۱ است. □

۱۰ جدولی ۳×۲ داریم. به دو خانه از جدول **مجاور** گوییم، اگر یک ضلع مشترک داشته باشند. به مجموعه‌ای از خانه‌ها **همبند** گوییم اگر به ازای هر دو خانه‌ی A و B از آن مجموعه، بتوانیم از A آغاز کرده، هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور برویم، و در پایان به B برسیم. به چند طریق می‌توان خانه‌های این جدول را به ۴ مجموعه‌ی همبند افراز کرد؟

۱) ۲ ۲) ۱۰ ۳) ۶ ۴) ۳۱ ۵) ۲۱

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

دو حالت داریم:

- خانه‌ها به دو بخش ۲ خانه‌ای و دو بخش ۱ خانه‌ای افراز شوند.
- خانه‌ها به سه بخش ۱ خانه‌ای و یک بخش ۳ خانه‌ای افراز شوند.

هر یک از پاسخ‌های مسئله (چه در حالت اول بگنجد و چه در حالت دوم)، متناظر انتخاب ۲ زیرجدول ۲×۱ از ۷ زیرجدول ۲×۱ ممکن است؛ زیرا اگر آن دو زیرجدول اشتراک نداشته باشند، یک پاسخ مسئله (از حالت اول) ساخته می‌شود. هم‌چنین اگر آن دو زیرجدول اشتراک داشته باشند، با ادغام کردن آن دو، پاسخی از مسئله (از حالت دوم) ساخته می‌شود. پس پاسخ مسئله برابر $\binom{۷}{۲} = ۲۱$ است. □

۱۱ یک جدول ۳×۲ داریم که در ابتدا، تمام خانه‌های آن سفید هستند. به دو خانه‌ی سفید با یک ضلع مشترک در جدول **دومینوس** می‌گوییم. الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

> تا زمانی که در جدول دومینوس وجود دارد، از میان همه‌ی دومینوس‌ها، یکی را به صورت تصادفی (با احتمال‌های برابر) انتخاب کرده و هر دو خانه‌ی آن را سیاه می‌کنیم.

به چه احتمالی پس از پایان الگوریتم، کل جدول سیاه خواهد شد؟

۱) $\frac{۱۳}{۲۱}$ ۲) $\frac{۵}{۷}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۷}$ ۵) $\frac{۱۷}{۲۱}$

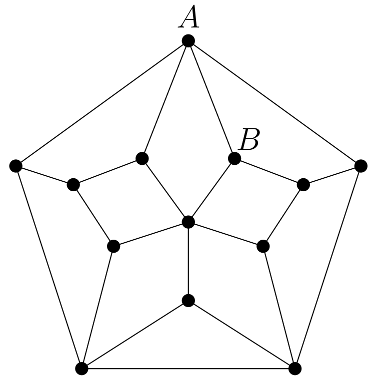
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر در مرحله‌ی اول یک دومینوی عمودی گذاشته شود، کل جدول به ناچار سیاه خواهد شد. اگر دومینوی آغازین افقی باشد، تنها در یکی از سه حالت دومینوی دوم، جدول سیاه نخواهد شد. پس پاسخ برابر است با:

$$\frac{۳}{۷} + \frac{۴}{۷} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۱۷}{۲۱}$$

□

۱۲ در شکل زیر، به دو نقطه (رأس) **مجاور** می‌گوییم، اگر با یک پاره‌خط مستقیم به هم وصل باشند:



می‌خواهیم از نقطه‌ی A آغاز کنیم، در هر مرحله به یک نقطه‌ی مجاور برویم و پس از دقیقاً ۶ مرحله به نقطه‌ی B برسیم (عبور از نقطه یا پاره‌خط تکراری اشکالی ندارد). این کار به چند طریق ممکن است؟

۱) ۴   ۲) ۶   ۳) ۷   ۴) ۰   ۵) ۸

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

با حذف کردن یال پایین شکل، گرافی دوبخشی پدید می‌آید (که در آن گشتی به طول زوج از A به B وجود ندارد). پس حتماً باید از یال پایین شکل عبور کنیم. فاصله‌ی A و B تا این یال به ترتیب ۲ و ۳ است؛ بنابراین ناچاریم ابتدا با یک مسیر به طول ۲ به یکی از رأس‌های این یال برویم، سپس یال را طی کرده و در انتها با یک مسیر به طول ۳ به B برویم. با بررسی حالات این مسیرها، مشاهده می‌کنیم که ۸ مسیر وجود دارد. □

۱۳ فرض کنید $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{14} \rangle$ رشته‌ای از ارقام ۰ و ۱ باشد. به تعدادی رقم متوالی و برابر، یک **زنجیره** می‌گوییم. زنجیره‌ای که بخشی از یک زنجیره‌ی بزرگ‌تر نباشد، **بلوک** نامیده می‌شود. برای مثال، رشته‌ی زیر از ۴ بلوک ساخته شده است:

$$\langle ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ \rangle$$

الگوریتم زیر را اجرا می‌کنیم:

> تا زمانی که تعداد بلوک‌های رشته بیش‌تر از یک است، بلوک اول و دوم (از سمت چپ) را در نظر می‌گیریم و بلوک کوچک‌تر را حذف می‌کنیم (اگر اندازه‌ی دو بلوک یکسان بود، بلوکی که شامل ارقام ۰ است، حذف می‌شود).

برای مثال، رشته‌ی بالا پس از یک مرحله به رشته‌ی $\langle ۰, ۰, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۱ \rangle$ تبدیل می‌شود. در میان تمام حالات ممکن برای رشته‌ی ۱۴ رقمی آغازین، کمینه‌ی تعداد ارقام رشته‌ی نهایی (پس از اجرای کامل الگوریتم مذکور) چیست؟

۱) ۲   ۲) ۴   ۳) ۶   ۴) ۵   ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

هر دو مرحله، طول بلوکی که حذف می‌شود حداقل یکی اضافه می‌گردد. طول بلوکی که در انتها باقی می‌ماند نیز کم‌تر از طول آخرین بلوک حذف شده نیست. پس اگر طول بلوک نهایی k باشد، حداکثر

$$۲(۱ + ۲ + \ldots + k) = k(k + ۱)$$

عنصر دیگر حذف شده است. با توجه به این که

$$k(k+۱) + k \geqslant ۱۴$$

پس $k \geqslant ۳$ است. برای $k = ۳$ نیز رشته‌ی زیر را در نظر بگیرید:

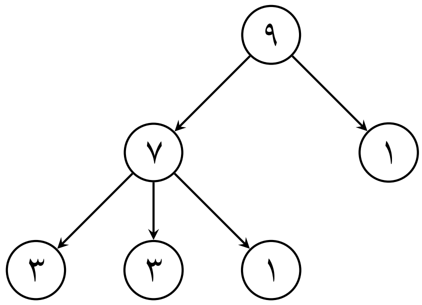
$$\langle ۱, ۰, ۰, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰, ۱, ۱, ۱, ۰, ۰, ۰ \rangle$$

□

دنباله‌ای از اعداد طبیعی داریم. می‌خواهیم تعدادی رابطه بین اعداد این دنباله با شرایط زیر تعریف کنیم:

- در هر رابطه، دو عدد نابرابر درگیر می‌شوند که عدد بزرگ‌تر را **پدر** رابطه و عدد کوچک‌تر را **فرزند** رابطه می‌نامیم.
- هر عدد باید حداکثر در یک رابطه، نقش فرزند را داشته باشد.
- مجموع فرزندان هر عدد باید کم‌تر یا مساوی خودش باشد.

به یک عدد **بدسگال** گوییم، اگر در هیچ رابطه‌ای فرزند نباشد. هدف، تعریف تعدادی رابطه بین اعداد دنباله است، طوری که تعداد عددهای بدسگال کمینه شود. به‌عنوان مثال، اگر دنباله‌ی اعداد برابر $\langle ۱, ۱, ۳, ۳, ۷, ۹ \rangle$ باشد، می‌توانیم به شکل زیر، رابطه‌ها را طوری تعریف کنیم که فقط یک عدد بدسگال داشته باشیم (هر پاره‌خط جهت‌دار نشان‌گر یک رابطه است که از پدر به فرزند کشیده شده است):



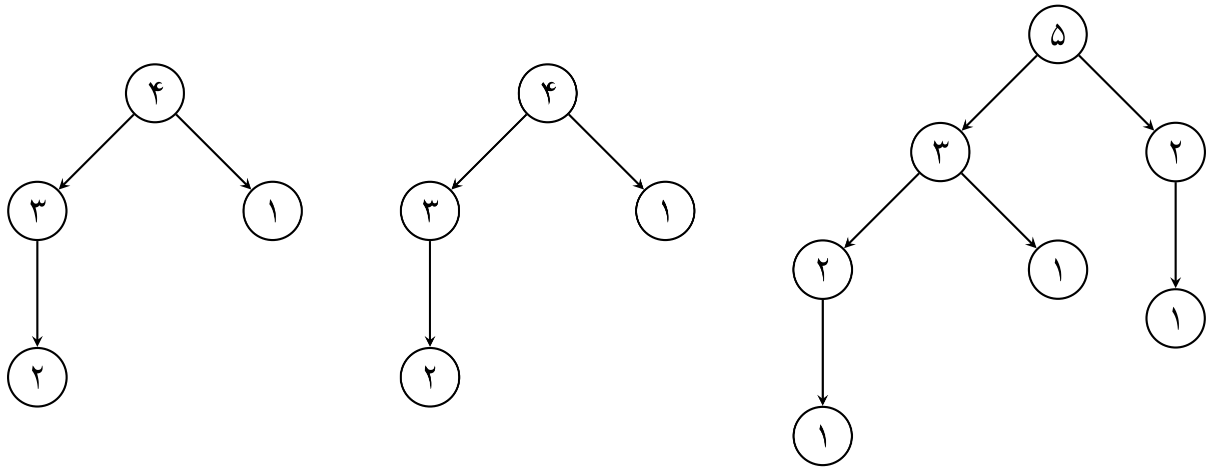
با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۴ اگر دنباله‌ی اعداد برابر $\langle ۱, ۱, ۱, ۱, ۱, ۲, ۲, ۲, ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴, ۵ \rangle$ باشد، حداقل چند عدد بدسگال خواهیم داشت؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۱ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

هیچ دو تا از اعداد ۳ نمی‌توانند در زیردرخت یک عدد بدسگال مشترک باشند، پس دست کم به سه عدد بدسگال نیاز داریم. هم‌چنین اگر رابطه‌ها را به صورت زیر تنظیم کنیم، دقیقاً سه عدد بدسگال ساخته می‌شود.



□

۱۵ الگوریتم‌های زیر را در نظر بگیرید:

آ) دنباله‌ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند کوچک‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).

ب) دنباله‌ی اعداد را از بزرگ به کوچک مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، آن را فرزند بزرگ‌ترین پدر ممکن قرار می‌دهیم (اگر پدر مجاز با شرایط مسئله برای او وجود نداشت، او را فرزند کسی قرار نمی‌دهیم و در نتیجه، بدسگال می‌شود).

پ) دنباله‌ی اعداد را از کوچک به بزرگ مرتب، و سپس آن را پیمایش می‌کنیم. به ترتیب به هر عدد که رسیدیم، با بررسی تمام حالات ایجاد رابطه بین این عدد و اعداد بدسگال کنونی کوچک‌تر از آن، بیش‌ترین تعداد بدسگال ممکن را (مطابق با شرایط مسئله)، فرزند عدد فعلی قرار می‌دهیم.

کدام الگوریتم‌ها به ازای هر دنباله‌ی اولیه‌ای از اعداد، کم‌ترین تعداد بدسگال ممکن را ایجاد می‌کنند؟

۱) ب و پ　　۲) آ و پ　　۳) هر سه　　۴) هیچ کدام　　۵) فقط پ

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

هیچ کدام از سه الگوریتم، ما را به هدف نمی‌رسانند. برای هر یک از الگوریتم‌ها مثال نقضی ارائه می‌کنیم:

- الگوریتم (آ):

$$\langle ۴, ۳, ۲, ۲, ۲ \rangle$$

- الگوریتم (ب):

$$\langle ۲۱, ۱۰, ۹, ۸, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳, ۳ \rangle$$

- الگوریتم (پ):

$$\langle ۱۵, ۱۰, ۶, ۵, ۵ \rangle$$

□