- آزمون ۲۰ سوال دارد و مدت زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- سوالات ۱۱ تا ۲۰ در دسته‌های چند سوالی آمده‌اند و قبل از هر دسته توضیحی ارائه شده است.
- پاسخ درست به هر سوال ۴ نمره‌ی مثبت و پاسخ نادرست به هر سوال ۱ نمره‌ی منفی دارد.
- ترتیب گزینه‌ها به طور تصادفی است.

---

۱ آقای مدیر در راستای صیانت از محیط زیست، رفته بود کلنگ احداث کارخانه‌ای در جوار تالاب پایان‌کاله را بزند که با پشه روبه‌رو شد. آقای مدیر به اصرار پشه برای نیش زدن پاسخ منفی داد اما به او گفت: مسئله‌ای داریم که اگر حل شود، دستور می‌دهم مشکل معیشت شما را هم برطرف کنند. ما در این‌جا یک زمین داریم که به شکل یک جدول ۲۰۲۲×۱۴۰۱ است. در حال حاضر، همه‌ی خانه‌های این جدول را آب گرفته. می‌خواهیم تعدادی از خانه‌های جدول را خشک کنیم طوری که به ازای هر زیرمستطیل با بیش از یک خانه در این جدول، حداقل نصف خانه‌های آن زیرمستطیل خشک شده باشند. در راستای حمایت از جمعیت هم‌نوعان، پشه می‌خواهد تعداد خانه‌های خشک شده کمینه باشد. حداقل چند خانه از جدول باید خشک شوند؟

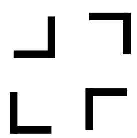
۱) ۲۱۲۴۱۱۱ ۲) ۲۱۲۴۶۱۶ ۳) ۱۸۸۸۵۴۸ ۴) ۱۴۱۶۴۱۱ ۵) ۹۴۴۲۷۴

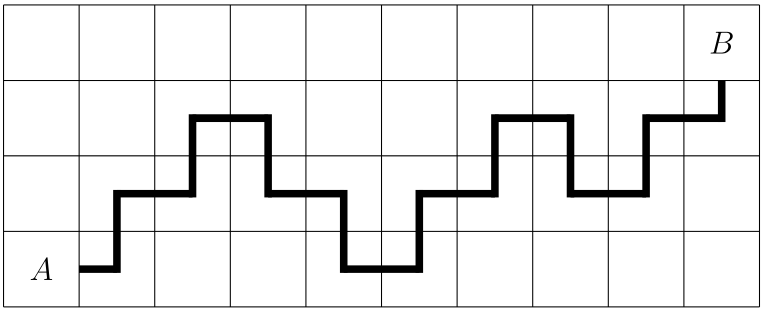
پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

ابتدا نشان می‌دهیم حداقل باید $۱۸۸۸۵۴۸ = ۲ \times \frac{۱۴۰۱\times۲۰۲۲}{۳}$ خانه را خشک کنیم. به سادگی می‌توان جدول را به زیرجدول‌های ۱×۳ افراز کرد. در هر کدام از آن‌ها حداقل به ۲ خانه‌ی خشک نیاز داریم. پس جواب حداقل به مقدار گفته شده است.
برای ساختن مثال با این تعداد خانه‌ی خشک شده هم می‌توانیم تمام خانه‌هایی را خشک کنیم که جمع شماره‌ی سطر و ستونشان بر ۳ بخش‌پذیر نیست. □

۲ پشمک یک جدول ۱۰×۴ همانند شکل زیر دارد و می‌خواهد تعدادی لوله‌ی L-شکل در خانه‌های این جدول قرار دهد طوری که هر لوله داخل یک خانه قرار بگیرد و با طی کردن تعدادی لوله، از یکی از اضلاع خانه‌ی A به یکی از اضلاع خانه‌ی B مسیر وجود داشته باشد. پشمک دوست‌دار محیط‌زیست است و می‌خواهد با کم‌ترین تعداد لوله این کار را انجام دهد. پشمک به چند طریق می‌تواند تعدادی لوله در این جدول قرار دهد طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و از A به B مسیر وجود داشته باشد؟ یک نمونه از لوله‌گذاری که در آن از ضلع راست A به ضلع پایین B مسیر وجود دارد، در جدول زیرین آمده است. دقت کنید که تعداد لوله‌ها در این مثال لزوماً کمینه نیست.

									B
A									


لوله‌ها



یک نمونه از لوله‌گذاری با ۱۷ لوله

۱) ۵۸   ۲) ۴۲   ۳) ۴۶   ۴) ۷۶   ۵) ۶۸

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

برای هر خانه‌ی X از جدول، مقدار f را تعداد حالاتی تعریف می‌کنیم که بتوان با گذاشتن تعدادی لوله، از A به خانه‌ی X رسید طوری که تعداد لوله‌ها کمینه باشد و آخرین لوله (در خانه‌ی X) به ضلع راست خانه‌ی X متصل شود. پس جواب سوال برابر جمع مقدار f در خانه‌ی سمت چپ B و خانه‌ی سمت پایین‌چپ B است. مقدار f هر خانه را هم می‌توانیم با توجه به این نکته محاسبه کنیم که لوله‌ی قبلی یا از سمت بالای آن خانه می‌آید و یا از سمت پایین آن خانه. در نتیجه، مقدار f یک خانه برابر جمع مقدار f خانه‌های پایین‌چپ و بالاچپ آن خانه است. پس می‌توانیم مقادیر f خانه‌های جدول را به ترتیب از چپ به راست محاسبه کنیم. در نتیجه، مطابق شکل زیر، جواب برابر ۴۲ = ۲۱ + ۲۱ خواهد بود.

۰	۰	۱	۱	۳	۳	۸	۸	۲۱	B
۰	۱	۱	۳	۳	۸	۸	۲۱	۲۱	
۱	۱	۲	۲	۵	۵	۱۳	۱۳	۳۴	
A	۱	۱	۲	۲	۵	۵	۱۳	۱۳	

□

۳ سه نفر با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ دور دایره نشسته‌اند و با هم بازی می‌کنند. هر نفر دو کارت دارد که شماره‌ی افراد دیگر به جز خودش روی آن‌ها نوشته شده است. بازی از فرد با شماره‌ی ۱ شروع می‌شود. هر نفر در نوبت خود، از میان کارت‌هایی که در حال حاضر در اختیار دارد، یک کارت را به‌صورت تصادفی (با احتمال یکسان) انتخاب می‌کند و نوبت را به فردی که شماره‌اش روی کارت منتخب آمده است می‌دهد و آن کارت را دور می‌اندازد. بازی زمانی پایان می‌یابد که فردی که نوبتش است، هیچ کارتی نداشته باشد. پس از پایان بازی، امید ریاضی تعداد کل کارت‌های دور انداخته شده چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۹}{۲}$ ۲) ۵   ۳) ۶   ۴) $\frac{۱۱}{۲}$ ۵) ۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

بازی را می‌توان به صورت یک گراف جهت‌دار ۳ رأسی در نظر گرفت که در ابتدا، میان هر دو رأس متفاوتی (در هر دو جهت) یال وجود دارد و بازی از رأس شماره‌ی ۱ شروع می‌شود و در هر نوبت، یکی از یال‌های خروجی رأس فعلی (که قبلاً انتخاب نشده) به تصادف انتخاب شده و نوبت به آن رأس می‌رسد. به راحتی می‌توان مشاهده کرد که مسیر طی شده یک گذر بسته است که به رأس شماره‌ی ۱ منتهی می‌شود و تعداد یال‌های این گذر ۴ یا ۶ است. پس کافی است احتمال این که گذر ۴ یالی باشد را محاسبه کنیم. احتمال این که گذر ۴ یالی باشد برابر $\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}$ است چون پس از طی کردن یال اول و سوم حتماً باید به رأس اولیه بازگردیم. پس امید ریاضی برابر است با

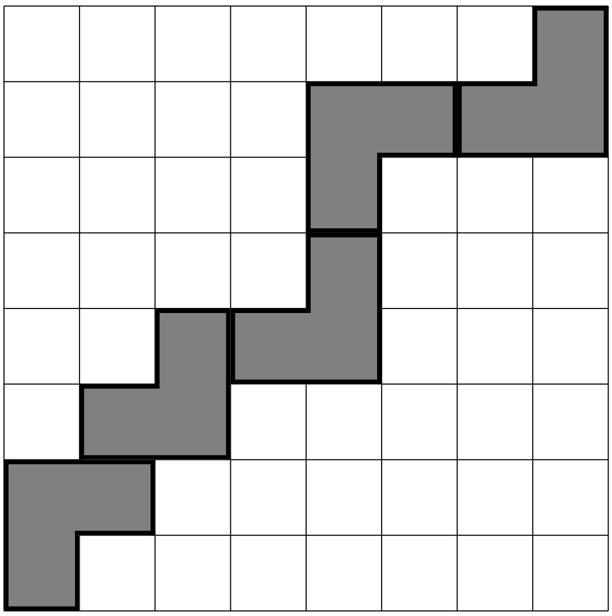
$$\frac{۱}{۴} \times ۴ + \frac{۳}{۴} \times ۶ = \frac{۱۱}{۲}.$$

□

۴ در مغازه‌ی آقا جلال، کاشی‌هایی به شکل  فروخته می‌شود. یک جدول ۸×۸ داریم. می‌خواهیم تعدادی کاشی بخریم و آن‌ها را طوری در جدول قرار دهیم که کاشی‌کاری معتبر باشد. یک کاشی‌کاری معتبر است اگر همه‌ی شرایط زیر را داشته باشد:

- هیچ دو کاشی‌ای هم‌پوشانی نداشته باشند.
- خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول حتماً کاشی‌کاری شده باشند.
- تنها با حرکت روی خانه‌های کاشی‌کاری شده‌ی جدول، بتوان از خانه‌ی پایین-چپ جدول شروع کرد، در هر مرحله به یک خانه‌ی مجاور ضلعی رفت، و در انتها به خانه‌ی بالا-راست جدول رسید.

با توجه به قیمت بالای کاشی‌های مغازه‌ی آقا جلال، می‌خواهیم تعداد کاشی‌هایی که می‌خریم کمینه باشد. به چند طریق می‌توان جدول را به صورت معتبر و با کم‌ترین تعداد کاشی ممکن کاشی‌کاری کرد؟ لازم به ذکر است که دو کاشی‌کاری متفاوتند اگر و تنها اگر یک خانه از جدول وجود داشته باشد که فقط در یکی از این دو حالت کاشی‌کاری شده باشد. در شکل زیر، یک نمونه کاشی‌کاری معتبر نمایش داده شده است. توجه کنید که تعداد کاشی‌ها در این نمونه لزوماً کمینه نیست.



۱) ۲۲۴   ۲) ۲۵۶   ۳) ۱۲۸   ۴) ۹۶   ۵) ۱۹۲

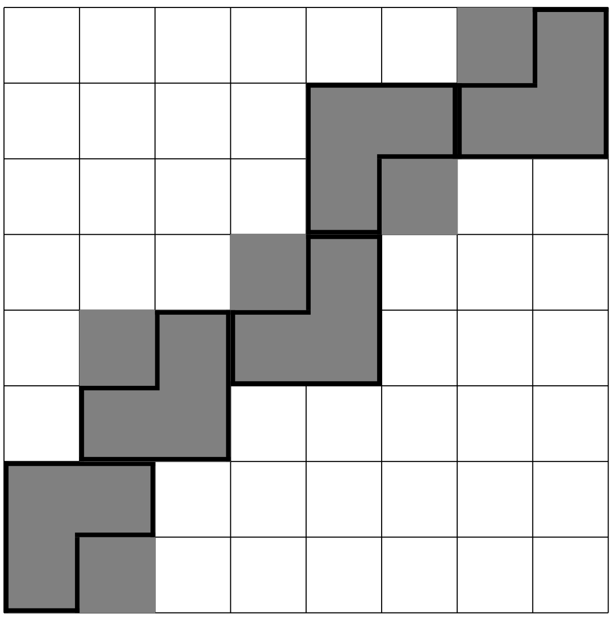
پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

هر مسیری از خانه‌ی پایین-چپ به بالا-راست شامل حداقل ۱۵ خانه می‌شود؛ پس حداقل ۱۵ خانه باید کاشی‌کاری شده باشند و حداقل ۵ کاشی باید خریداری بشود. هم‌چنین طبق مثال نشان داده شده در صورت سوال می‌دانیم کاشی‌کاری معتبری با ۵ کاشی وجود دارد.
چون ثابت کردیم که در یک کاشی‌کاری معتبر، ۵ کاشی استفاده شده و ۱۵ خانه کاشی‌کاری شده‌اند، این ۱۵ خانه باید دقیقاً به شکل یک مسیر با ۱۵ کاشی از خانه‌ی پایین-چپ به بالا-راست باشند و با انتخاب یک مسیر بین این دو خانه، کاشی‌کاری منطبق بر آن در صورت وجود به صورت یکتا مشخص می‌شود. با طی کردن چنین مسیری، ما ۷ بار به سمت بالا و ۷ بار به سمت راست حرکت می‌کنیم.

می‌توان نشان داد که در یک کاشی‌کاری معتبر کمینه، هر یک از کاشی‌ها به یکی از دو شکل یا قرار گرفته‌اند. هم‌چنین می‌توان نشان داد که از هر مربع ۲ × ۲ از این جدول ۸ × ۸، حداکثر ۳ خانه با کاشی پوشانده می‌شوند. پس می‌توان فضای حالات کاشی‌کاری‌های معتبر کمینه را به دو زیرمسئله‌ی مستقل شکست (که تعداد حالاتشان در هم ضرب می‌شوند):

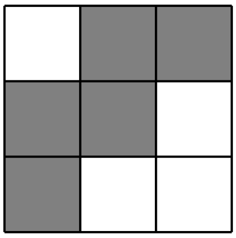
- زیرمسئله‌ی اول: متصل کردن خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول ۸ × ۸ با ۵ کاشی ۲ × ۲ (به‌جای کاشی‌های L-شکل).
- زیرمسئله‌ی دوم: جایگزین کردن کاشی‌های ۲ × ۲ با کاشی‌های L-شکل.

شکل زیر حالت متناظر با مثال صورت سوال را در این دو زیرمسئله نشان می‌دهد.



برای شمارش حالات زیرمسئله‌ی اول، از این ایده استفاده می‌کنیم که هر حالت اتصال خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست جدول ۸ × ۸ با ۵ کاشی ۲ × ۲ متناظر است با یک حالت اتصال خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست یک جدول ۳ × ۳ با ۵ کاشی ۱ × ۱. برای این تناظر، کافی است به این نکته توجه شود که مسیر کاشی‌ها (در هر دو حالت متناظر) ۲ بار به راست و ۲ بار به بالا حرکت می‌کند. پس می‌توان از روی همین حرکت‌ها این

دو مجموعه‌ی حالت‌ها را متناظر کرد. شکل زیر حالت متناظر با مثال بالا را در جدول ۳×۳ نشان می‌دهد. تعداد حالات اتصال خانه‌های پایین-چپ و بالا-راست یک جدول ۳×۳ با ۵ کاشی ۱×۱ هم برابر است با $\binom{۴}{۲}$.



برای شمارش حالات زیرمسئله‌ی دوم نیز کافی است به این نکته توجه شود که هر کاشی ۲×۲ را می‌توان به دو روش با کاشی‌های L-شکل جایگزین کرد. پس تعداد حالات زیرمسئله‌ی دوم برابر است با $۲^۵$.
با توجه به استقلال دو زیرمسئله، جواب نهایی برابر است با $۱۹۲ = ۲^۵ \times \binom{۴}{۲}$. □

۵ دنباله‌ای از سیاه‌چاله‌ها در یک ردیف و به ترتیب با اندازه‌های «۳, ۱, ۵, ۲, ۳, ۵, ۸, ۲, ۳, ۲, ۸, ۴, ۵» در فضا قرار گرفته‌اند. می‌دانیم با ادغام تعدادی سیاه‌چاله، یک سیاه‌چاله‌ی جدید با اندازه‌ای برابر با مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های اولیه به دست می‌آید. حال می‌خواهیم یک بازه‌ی متوالی از یک یا چند سیاه‌چاله را انتخاب کنیم و با ادغامشان یک سیاه‌چاله‌ی بزرگ بسازیم؛ سپس تا جایی که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌مان از اندازه‌ی یکی از سیاه‌چاله‌های همسایه (راست یا چپ) بزرگ‌تر یا مساوی است، آن را با ادغام با سیاه‌چاله‌ی همسایه، بزرگ‌تر کنیم. چند بازه‌ی متوالی متمایز از دنباله‌ی سیاه‌چاله‌ها وجود دارد که در صورت انتخاب برای ادغام اولیه، می‌توان با این فرایند همه‌ی سیاه‌چاله‌ها را با هم ادغام کرد؟

۱) ۸۰ ۲) ۸۴ ۳) ۷۸ ۴) ۸۲ ۵) ۷۶

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

اگر بازه‌ی متوالی اولیه شامل سیاه‌چاله‌ای شود که اندازه‌اش برابر با اندازه‌ی بزرگ‌ترین سیاه‌چاله باشد، اندازه‌ی سیاه‌چاله‌ی ادغامی بزرگ‌تر یا مساوی اندازه‌ی همه‌ی سیاه‌چاله‌های دیگر می‌شود. بنابراین می‌توان آن را به نوبت با سیاه‌چاله‌های همسایه ادغام کرد تا جایی که همه‌ی سیاه‌چاله‌ها با هم ادغام شده باشند. در این سوال، ۶۱ بازه‌ی متوالی هستند که شامل سیاه‌چاله‌ای با اندازه‌ی ۸ (اندازه‌ی بزرگ‌ترین سیاه‌چاله) می‌شوند. حالا فرض کنید بازه‌ی متوالی اولیه شامل سیاه‌چاله‌ای با اندازه‌ی بیشینه نباشد. در این صورت، این بازه، داخل یکی از بازه‌های محصور قرار دارد. بازه‌ی محصور یک بازه‌ی متوالی است که شامل سیاه‌چاله‌ای با اندازه‌ی بیشینه نیست اما از چپ و راست به یک سیاه‌چاله‌ی با اندازه‌ی بیشینه یا پایان دنباله محدود می‌شود. اگر بازه‌ی اولیه بخواهد با همه ادغام شود، با توجه به این که اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های داخل بازه‌ی محصور کوچک‌تر یا مساوی با اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های چپ و راست بازه‌ی محصور است، می‌تواند ابتدا با کل بازه‌ی محصوری که داخلش قرار دارد، ادغام شود. بنابراین فقط در صورتی می‌تواند با همه ادغام شود که بتواند با کل بازه‌ی محصوری که داخلش قرار دارد ادغام شود و هم‌چنین مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های داخل بازه‌ی محصور حداقل به اندازه‌ی سیاه‌چاله‌های با اندازه‌ی بیشینه باشد. بنابراین می‌توانیم مسئله را به صورت بازگشتی برای بازه‌های محصوری که مجموع اندازه‌ی سیاه‌چاله‌هایشان حداقل به مقدار اندازه‌ی بزرگ‌ترین سیاه‌چاله است حل کنیم و جوابشان را به جواب مسئله‌ی اصلی بیافزاییم. در این سوال، بازه‌های محصور «۳, ۱, ۵, ۲, ۳, ۵» و «۴, ۵» چنین خاصیتی دارند و با حل بازگشتی مسئله برایشان

به ترتیب به جواب‌های ۱۷ و ۲ می‌رسیم. بنابراین جواب مسئله‌ای اصلی برابر با $۸۰ = ۲ + ۱۷ + ۶۱$ است.
□

۶ جک یک عدد ۹ رقمی دارد که می‌خواهد آن را «پالایش» کند. فرایند پالایش به این صورت است که در هر مرحله، ارقام عدد فعلی به کم‌ترین تعداد بازه‌ی متوالی تقسیم می‌شوند طوری که ارقام در هر بازه یکسان باشند. سپس برای ایجاد عدد جدید (جایگزین عدد فعلی)، به ازای هر یک از این بازه‌ها به ترتیب از چپ به راست، طول آن‌ها (تعداد ارقام در هر بازه) نوشته می‌شود. برای مثال، عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ بعد از یک مرحله پالایش به عدد ۱۲۱۱۴ تبدیل می‌شود. جک فرایند پالایش را تا وقتی که به یک عدد یک رقمی برسد ادامه می‌دهد. عدد یک رقمی نهایی چند حالت مختلف می‌تواند داشته باشد؟ در مثال زیر، فرایند پالایش عدد ۱۲۲۳۱۸۸۸۸ را مشاهده می‌کنید که به عدد ۲ ختم می‌شود.

$$۱۲۲۳۱۸۸۸۸ \rightarrow ۱۲۱۱۴ \rightarrow ۱۱۲۱ \rightarrow ۲۱۱ \rightarrow ۱۲ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۲$$

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

نکته‌ای که وجود دارد این است که جمع ارقام یک عدد بعد از پالایش افزایش نمی‌یابد و پس از یک بار پالایش جمع ارقام ۹ می‌شود. پس می‌توان گفت که بعد از هر پالایشی جمع ارقام از ۹ بیش‌تر نمی‌شود. حال می‌دانیم اگر بخواهیم به عدد یک رقمی غیر ۹ برسیم باید حداقل ۲ مرحله پالایش کنیم (با یک مرحله پالایش یا به ۹ یا به یک عدد با تعداد ارقام بیش‌تر از یک می‌رسیم).
با توجه به نتایج بالا می‌خواهیم بگوییم به رقم ۷ نمی‌توان رسید. اگر به عدد ۷ برسیم، آنگاه در آخرین پالایش حتماً عدد ۱۱۱۱۱۱۱ را داشته‌ایم. حالت‌های دیگر جمع ارقام بیش‌تر از ۹ می‌دهند که امکان‌پذیر نیست. آخرین عدد جک قبل از ۱۱۱۱۱۱۱، باید حداقل ۷ رقم داشته باشد به طوری که مجاورها متفاوت باشند. می‌توان گفت که در این صورت، جمع آن ۷ رقم (که صفر هم نمی‌توانند باشند) حداقل ۱۰ می‌شود که این ممکن نیست چون گفتیم جمع ارقام بعد از پالایش از ۹ بیش‌تر نمی‌شود.
با استدلال مشابه می‌توان گفت که به عدد ۸ هم نمی‌توان رسید.
به رقم ۱ نیز نمی‌توان رسید چون در این صورت، قبل از آخرین پالایش نیز عددی یک رقمی داشته‌ایم که با این شرایط، فرایند پالایش در همان مرحله متوقف می‌شد. بقیه‌ی عددهای یک رقمی بیش‌تر از ۰ را می‌توان به صورت زیر ساخت:

- $۱۱۱۱۲۲۲۲۲ \rightarrow ۴۵ \rightarrow ۱۱ \rightarrow ۲$
- $۱۱۲۲۲۲۳۳۳ \rightarrow ۲۳۴ \rightarrow ۱۱۱ \rightarrow ۳$
- $۱۲۲۲۳۳۴۴۴ \rightarrow ۱۳۲۳ \rightarrow ۱۱۱۱ \rightarrow ۴$
- $۱۲۲۲۳۴۴۴۵ \rightarrow ۱۳۱۳۱ \rightarrow ۱۱۱۱۱ \rightarrow ۵$
- $۱۲۲۳۴۴۵۶۶ \rightarrow ۱۲۱۲۱۲ \rightarrow ۱۱۱۱۱۱ \rightarrow ۶$
- $۱۱۱۱۱۱۱۱۱ \rightarrow ۹$

پس جواب برابر ۶ است. □

۷ یک گراف ساده و همبند ۱۱ رأسی داریم که می‌توان از هر رأس آن با طیِ حداکثر ۵ یال به هر رأس دیگر رسید. از طرفی دو رأس در این گراف وجود دارند که برای رسیدن از یکی به دیگری طی کردن حداقل ۵ یال لازم است. این گراف حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۳۲ ۲) ۲۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۶ ۵) ۳۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

دو رأسی که فاصله‌ی میان آن‌ها ۵ یال است را در نظر بگیرید. آن دو را u و v می‌نامیم. کوتاه‌ترین مسیر میان u و v شامل ۶ رأس (شامل خود u و v) است. میان این ۶ رأس، جز یال‌های مسیر، یال دیگری نمی‌توانیم داشته باشیم وگرنه طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v از ۵ کم‌تر می‌شود. هر یک از ۵ رأس خارج مسیر هم حداکثر ۳ یال به رأس‌های مسیر دارند وگرنه مجدداً طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v کم‌تر از ۵ می‌شود. از طرفی، میان رأس‌های خارج از مسیر هم حداکثر $\binom{۵}{۲}$ یال داریم. پس حداکثر تعداد یال‌های این گراف $۳۰ = \binom{۵}{۲} + ۳ \times ۵ + ۵$ است. ضمناً گرافی هم با شرایط مطلوب و تعداد ۳۰ یال وجود دارد. یک مسیر ۶ رأسی را در نظر بگیرید. ۵ رأس خارج از مسیر را دو به دو به یکدیگر با ۱۰ یال متصل می‌کنیم. هم‌چنین هر یک از آن‌ها را به ۳ رأس ابتدای مسیر نیز متصل می‌کنیم. تعداد یال‌های این گراف ۳۰ است و شرایط مطلوب مسئله را هم دارد.

□

۸ کلاه‌قرمزی یک جدول ۱۰×۱۰ دارد که سطرها و ستون‌های آن از ۱ تا ۱۰ شماره‌گذاری شده‌اند و در هر خانه‌ی آن دقیقاً یک سوراخ وجود دارد. بچه‌ی فامیل دور که ۸ تیله دارد، این جدول را پیدا کرده است. او به ازای هر تیله، یکی از خانه‌های جدول را به صورت تصادفی با احتمال یکسان انتخاب می‌کند و تیله را در سوراخ آن خانه می‌اندازد (امکان دارد در سوراخ یک خانه، چندین تیله قرار بگیرد). حال اگر تعداد تیله‌های واقع در سوراخ خانه‌ی تقاطع سطر iاُم و ستون jاُم را با $c_{i,j}$ نمایش دهیم، زیبایی جدول با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times (c_{i,j})^۲$$

امید ریاضی زیبایی جدول پس از انداختن ۸ تیله چه‌قدر است؟

۱) $\frac{۸۶۶۷}{۵۰}$ ۲) $\frac{۱۲۹۴۷}{۵۰}$ ۳) $\frac{۱۶۷۶۷}{۱۰۰}$ ۴) ۱۹۳۶ ۵) $\frac{۲۵۰۴۷}{۱۰۰}$

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

می‌دانیم $(c_{i,j})^۲ = ۲\binom{c_{i,j}}{۲} + c_{i,j}$. از این رابطه برای بازنویسی امید ریاضی خواسته شده، استفاده می‌کنیم.

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times (c_{i,j})^۲\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times c_{i,j}\right] + ۲ \times \mathbb{E}\left[\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times \binom{c_{i,j}}{۲}\right]$$

از خواص امید ریاضی استفاده می‌کنیم و عبارت بالا را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times \mathbb{E}\left[c_{i,j}\right] + ۲ \times \sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times \mathbb{E}\left[\binom{c_{i,j}}{۲}\right]$$

برای محاسبه‌ی جمله‌ی اول تنها کافی است $\mathbb{E}\left[c_{i,j}\right]$ را محاسبه کنیم. هر توپ به احتمال $\frac{۱}{۱۰۰}$ در خانه‌ی (i,j) قرار می‌گیرد. پس چون ۸ توپ داریم، خواهیم داشت $\mathbb{E}\left[c_{i,j}\right] = ۸ \times \frac{۱}{۱۰۰} = \frac{۸}{۱۰۰}$.
بنابراین مقدار نهایی جمله‌ی اول می‌شود:

$$\sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times \frac{۸}{۱۰۰} = \sum_{i=۱}^{۱۰} i \times \sum_{j=۱}^{۱۰} j \times \frac{۸}{۱۰۰} = ۲۴۲$$

برای محاسبه‌ی جمله‌ی دوم لازم است $\mathbb{E}\left[\binom{c_{i,j}}{۲}\right]$ را به دست بیاوریم. این عبارت در واقع امید ریاضی تعداد جفت توپ‌هایی است که در خانه‌ی (i,j) قرار گرفته‌اند. یک جفت از توپ‌ها به احتمال $\frac{۱}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱۰۰} = ۱۰^{-۴}$ در خانه‌ی (i,j) قرار می‌گیرند. پس چون $\binom{۸}{۲}$ جفت توپ داریم، خواهیم داشت $\mathbb{E}\left[\binom{c_{i,j}}{۲}\right] = \binom{۸}{۲} \times ۱۰^{-۴} = \frac{۲۸}{۱۰^۴}$.
بنابراین مقدار نهایی جمله‌ی دوم می‌شود:

$$۲ \times \sum_{i=۱}^{۱۰}\sum_{j=۱}^{۱۰} i \times j \times \frac{۲۸}{۱۰^۴} = ۲ \times \sum_{i=۱}^{۱۰} i \times \sum_{j=۱}^{۱۰} j \times \frac{۲۸}{۱۰^۴} = \frac{۸۴۷}{۵۰}$$

لذا پاسخ نهایی برابر است با:

$$۲۴۲ + \frac{۸۴۷}{۵۰} = \frac{۱۲۹۴۷}{۵۰}$$

□

۹ یک گراف $\binom{۲۶}{۶}$ رأسی داریم که هر رأس آن متناظر با یک رشته‌ی دودویی به طول ۲۶ با ۲۰ رقمِ صفر و ۶ رقمِ یک است. در این گراف، بین دو رأس متفاوت، یال (بدون جهت) می‌گذاریم اگر و تنها اگر رشته‌ی متناظر با یکی از آن‌ها با یک «شیفت دوری»، قابل تبدیل به رشته‌ی متناظر با رأس دیگر باشد. عملیات شیفت دوری روی یک رشته‌ی دودویی را این‌گونه تعریف می‌کنیم که راست‌ترین رقم رشته را حذف، و آن را در چپ‌ترین جایگاه رشته اضافه می‌کنیم. برای مثال، شیفت دوری رشته‌ی ۱۰۰۰۱۰۱، رشته‌ی ۱۱۰۰۰۱۰ را نتیجه می‌دهد. تعداد مؤلفه‌های همبندی این گراف را بشمارید.

۱) ۸۸۵۵ ۲) ۸۸۷۷ ۳) ۸۸۸۸ ۴) ۸۸۹۹ ۵) ۸۸۶۶

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

اگر رشته‌ها را روی دایره نگاه کنیم و تعداد ۰ های بین هر دو ۱ را حساب کنیم، می‌خواهیم عدد ۲۰ را به ۶ عدد مرتب صحیح نامنفی افراز کنیم و تعداد افرازهایی را حساب کنیم که با شیفت دوری به هم تبدیل نمی‌شوند.
همه‌ی افرازهای ممکن را در نظر بگیرید:

- بعضی از این افرازها با ۱ شیفت دوری به خودشان تبدیل می‌شوند. چنین افرازهایی در مسئله‌ی ما وجود ندارند، چون ۲۰ بر ۶ بخش‌پذیر نیست.
- بعضی از این افرازها با ۲ بار شیفت دوری به خودشان تبدیل می‌شوند. چنین افرازهایی در مسئله‌ی ما وجود ندارند، چون ۲۰ بر ۳ بخش‌پذیر نیست.
- بعضی از این افرازها با ۳ بار شیفت دوری به خودشان تبدیل می‌شوند.
- بقیه‌ی افرازها به گونه‌ای هستند که همه‌ی شیفت‌های دوری‌شان افرازهای متمایزی ایجاد می‌کنند.

تعداد افرازهای دسته‌ی سوم برابر است با تعداد جواب‌های دستگاه معادلات زیر:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20 \\ x_1 = x_4 \\ x_2 = x_5 \\ x_3 = x_6 \end{cases}$$

که این مقدار نیز برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $y_1 + y_2 + y_3 = 10$ که می‌شود $\binom{12}{2}$.
تعداد افرازهای دسته‌ی چهارم هم برابر است با تعداد جواب‌های معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = 20$ به غیر از افرازهای دسته‌ی سوم (جواب‌های دستگاه بالا) که می‌شود $\binom{25}{5} - \binom{12}{2}$.
هر ۳ جواب از افرازهای دسته‌ی سوم به یک حالت افراز دوری (و یک مؤلفه‌ی همبندی) متناظر می‌شوند و هر ۶ جواب از افرازهای دسته‌ی چهارم هم با یک حالت افراز دوری متناظرند. پس جواب سوال برابر است با:

$$\frac{\binom{12}{2}}{3} + \frac{\binom{25}{5} - \binom{12}{2}}{6} = \frac{\binom{25}{5} + \binom{12}{2}}{6} = 8866$$

□

۱۰ به یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ ملایم می‌گوییم اگر حاصل ضرب هر دو عدد متوالی در جایگشت، حداکثر ۳۰ شود. چند جایگشتِ ملایم از اعداد ۱ تا ۱۰ داریم؟

۱) ۱۷۲۸ ۲) ۲۸۸۰ ۳) ۳۴۵۶ ۴) ۵۷۶ ۵) ۱۴۴

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

روشی برای ساخت جایگشت ارائه می‌دهیم و ادعا می‌کنیم که با این روش فقط جایگشت‌های ملایم ساخته می‌شوند و هر جایگشت ملایم متفاوت هم دقیقاً به یک شیوه ساخته می‌شود. بنابراین تعداد جایگشت‌های ملایم متفاوت با تعداد شیوه‌های مختلف ساخت جایگشت با استفاده از این روش برابر خواهد بود. در این روش، یک دنباله از اعداد به نام S داریم که در ابتدا خالی است و در هر مرحله، طبق قاعده‌ای که در ادامه می‌آید، یکی از اعداد ۱ تا ۱۰ را که تاکنون به S اضافه نشده به جایی از S اضافه می‌کنیم طوری که حاصل ضرب عدد اضافه شده و اعداد مجاورش در S از ۳۰ بیش‌تر نشود.
در هر مرحله، عددی را که قرار است به S اضافه شود با این قاعده انتخاب می‌کنیم:

- اگر یک عدد باقی مانده (به S اضافه نشده) بود، همان عدد را انتخاب می‌کنیم.
- اگر حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد باقی‌مانده از ۳۰ بیش‌تر بود، عدد بزرگ‌تر را برای اضافه کردن به S انتخاب می‌کنیم.
- اگر حاصل‌ضرب کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اعداد باقی‌مانده کم‌تر یا مساوی با ۳۰ بود، عدد کوچک‌تر را برای اضافه کردن به S انتخاب می‌کنیم.

توجه کنید که طبق این روش، همواره در هر مرحله و پیش از انتخاب عدد جدید، یک پیشوند و یک پسوند از دنباله‌ی اعداد طبیعی ۱ تا ۱۰ انتخاب و به S اضافه شده‌اند. در ادامه، اعداد این پیشوند و پسوند که تاکنون اضافه شده‌اند را به ترتیب، اعداد سفید و اعداد سیاه می‌نامیم و تعدادشان را به ترتیب با W و B نمایش می‌دهیم.

هم‌چنین توجه کنید که طبق این قاعده، ترتیب انتخاب و اضافه شدن اعداد (مستقل از مکان قرارگیری‌شان در S) به صورت یکتا مشخص می‌شود. این ترتیب را O می‌نامیم.
حال برای انتخاب مکان اضافه شدن عدد انتخاب شده، که آن را x می‌نامیم، چنین عمل می‌کنیم:
عدد x می‌تواند کنار تمام اعداد سفید قرار بگیرد؛ چرا که هر کدام از اعداد سفید در زمان اضافه شدن به S، حاصل‌ضربشان با عددی بزرگ‌تر یا مساوی با x، حداکثر ۳۰ شده است. هم‌چنین عدد x نمی‌تواند کنار هیچ عدد سیاهی قرار بگیرد؛ چرا که هر کدام از اعداد سیاه هنگام اضافه شدن به S، حاصل‌ضربشان با عددی کوچک‌تر یا مساوی با x، از ۳۰ بیش‌تر شده است. بنا بر همین استدلال، اعداد سیاه که همگی از x بزرگ‌ترند نیز نمی‌توانند در شکل فعلی و نهایی S کنار هم باشند.
بنابراین، تعداد جاهایی که عدد x می‌تواند به S اضافه شود، به این شکل قابل محاسبه است: $W + B + ۱$ جا برای اضافه کردن x به S وجود دارد که هر عدد سیاه با دو جای به‌خصوص از آن‌ها مجاور است (دقت کنید که هیچ دو عدد سیاهی مجاور نیستند). بنابراین تعداد مکان‌های ممکن برای اضافه کردن x برابر است با $W + B + ۱ - ۲B = W - B + ۱$.
پس از ۱۰ مرحله، همه‌ی اعداد به S اضافه می‌شوند (جزئیات این ۱۰ مرحله و مقادیر x، B و W در طی این مراحل، در جدول انتهای پاسخ موجود است) و یک جایگشت به دست می‌آید که حتماً ملایم است. چرا که در هر مرحله، عدد جدید را جایی اضافه کرده‌ایم که S ملایم باقی بماند. هم‌چنین، با توجه به ترتیب ثابت O و شیوه‌ی اضافه شدن اعداد به S، هر جایگشت ملایم حداکثر به یک شیوه ساخته می‌شود.
اکنون می‌خواهیم اثبات کنیم که هر جایگشت ملایم مثل P با روش بالا ساخته می‌شود. برای اثبات این موضوع، لازم است نشان دهیم که اگر اعداد جایگشت P را به ترتیب O در ۱۰ مرحله به یک دنباله‌ی خالی اضافه کنیم، آن دنباله در طی ۱۰ مرحله همواره ملایم خواهد بود، پس روش ما هم می‌تواند این دنباله را بسازد (دقت کنید که طبق روشمان، می‌توانیم اعداد را به هر جایی از دنباله اضافه کنیم به شرطی که آن را ملایم نگه دارد). می‌خواهیم ثابت کنیم که در هر مرحله از اضافه کردن اعداد جایگشت ملایم P به دنباله طبق ترتیب O، حاصل ضرب عدد اضافه شده (x) و عدد مجاورش (y) حداکثر ۳۰ می‌شود. فرض کنید غیر از این باشد و حاصل ضربشان از ۳۰ بیش‌تر شده باشد. با توجه به این که P یک جایگشت ملایم است، باید عدد دیگری هم در ادامه بینشان قرار بگیرد. پس x آخرین عدد در O نیست. اگر x کوچک‌ترین عدد باقی‌مانده بوده باشد، هر عددی که در ادامه بینشان اضافه شود، حاصل ضربش با y بیش‌تر از ۳۰ می‌شود. هم‌چنین، اگر x بزرگ‌ترین عدد باقی‌مانده بوده باشد، هر عددی که در ادامه بینشان اضافه شود، حاصل ضربش با x بیش‌تر از ۳۰ می‌شود. بنابراین امکان ندارد دنباله‌ی نهایی جایگشتی ملایم شود و تناقض حاصل می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم حاصل ضرب x و اعداد مجاورش کم‌تر یا مساوی با ۳۰ خواهد بود و هر جایگشت ملایمی مثل P با روش گفته شده ساخته می‌شود.
همان‌طور که گفتیم، ترتیب O با توجه به شیوه‌ی ساخت S، به صورت یکتا به دست می‌آید. هم‌چنین هر بار، تعداد جاهای ممکن برای اضافه کردن x به S، برابر با $W - B + ۱$ است. به این ترتیب، مقدار x در هر مرحله و تعداد جاهای ممکن برای اضافه کردن آن در S مطابق با جدول زیر خواهد بود. بنابراین، طبق اصل ضرب، تعداد شیوه‌های مختلف برای ساخت جایگشت ملایم برابر با حاصل‌ضرب اعداد چپ‌ترین ستون است که می‌شود ۵۷۶.

مرحله	x	W	B	$W-B+۱$
۱	۱	۰	۰	۱
۲	۲	۱	۰	۲
۳	۳	۲	۰	۳
۴	۱۰	۳	۰	۴
۵	۹	۳	۱	۳
۶	۸	۳	۲	۲
۷	۴	۳	۳	۱
۸	۷	۴	۳	۲
۹	۵	۴	۴	۱
۱۰	۶	۵	۴	۲

□

موشی و پیشی مشغول بازی با n کلید و n لامپ هستند. می‌دانیم که لامپ‌ها رنگ‌هایی متمایز دارند و هر کدام، همواره در یکی از دو وضعیت خاموش و روشن هستند. کلیدها نیز از ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند و با فشردن هر یک، لامپ متصل به آن کلید تغییر وضعیت می‌دهد. در ابتدای بازی، پیشی به طور دل‌خواه کلیدها را سیم‌کشی کرده و هر کدام از آن‌ها را به دقیقاً یک لامپ متصل می‌کند (ممکن است چند کلید به یک لامپ وصل شده باشند). سپس، موشی که از شیوه‌ی سیم‌کشی پیشی بی‌اطلاع است، در هر درخواست، دو تا از کلیدها را انتخاب و برای پیشی مشخص می‌کند. پیشی پس از گرفتن یک آب‌نبات از موشی، آن دو کلید را هم‌زمان فشار می‌دهد. با فشرده شدن هر کلیدی، لامپ متصل به آن تغییر وضعیت می‌دهد؛ ولی اگر دو کلید فشرده شده به یک لامپ متصل بوده باشند، وضعیت لامپ‌ها هیچ تغییری نمی‌کند. هدف موشی این است که بداند هر کلید به چه لامپی متصل شده است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۱ اگر $n=۸$ باشد و پیشی تضمین کند که همه‌ی لامپ‌ها در سیم‌کشی به کلیدی متصل شده‌اند، موشی حداقل به چند آب‌نبات نیاز دارد تا تحت هر شرایطی بتواند به هدفش برسد؟

۱) ۴ ۲) هیچ‌کدام ۳) ۶ ۴) ۷ ۵) ۵

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

می‌دانیم برای ۳ لامپ دل‌خواه، می‌توان وضعیت اتصال آن‌ها را با دو پرسش مشخص کرد. پس دو دسته‌ی ۳ تایی دل‌خواه از لامپ‌ها را در نظر گرفته و وضعیت اتصال همه‌ی آن‌ها را با ۴ پرسش متوجه می‌شویم. سپس یکی از

دو لامپ باقی‌مانده را نیز با یک لامپ مشخص شده در نظر گرفته و وضعیت اتصال آن را نیز متوجه می‌شویم. وضعیت لامپ آخر نیز یکتا مشخص می‌شود.
برای اثبات کمینه بودن، مسئله را با گراف مدل می‌کنیم: برای هر لامپ، یک رأس در نظر می‌گیریم و بین هر دو لامپی که در یک درخواست مطرح کرده‌ایم، یال می‌گذاریم. می‌دانیم که در وضعیت نهایی، اولاً حداکثر یک مؤلفه‌ی تک رأسی داریم و ثانیاً مؤلفه‌ی دو رأسی نداریم چرا که در غیر این صورت، سیم‌کشی بین لامپ‌ها و کلیدها یکتا نخواهد بود. پس با توجه به $n = ۸$، در گراف نهایی حداکثر ۳ مؤلفه وجود دارد. در نتیجه، برای کاهش تعداد مؤلفه‌های همبندی به ۳، به حداقل ۵ یال نیاز داریم. □

۱۲ اگر $n = ۵$ باشد و موشی مقدار نامحدودی آب‌نبات در اختیار داشته باشد، به ازای چند سیم‌کشی مختلف می‌تواند به هدفش برسد؟

۱) ۲۸۲۰ ۲) ۲۸۰۰ ۳) ۳۱۲۵ ۴) ۳۱۲۰ ۵) ۰

پاسخ: گزینه‌ی ۱ درست است.

نشان می‌دهیم اگر کلیدها به حداقل ۳ لامپ مختلف وصل باشند، می‌توان وضعیت همه‌ی اتصالات را فهمید. آن ۳ کلیدی که به ۳ لامپ مختلف متصل‌اند را در نظر بگیرید. اگر در دو درخواست، دو جفت از این کلیدها را انتخاب کنیم، متوجه می‌شویم که این ۳ کلید به کدام ۳ لامپ متصل‌اند. سپس وضعیت اتصال هر کلید دیگری را با انجام یک درخواست و انتخاب آن کلید به همراه یکی از آن ۳ کلید می‌توان متوجه شد.
از طرف دیگر، می‌توان ثابت کرد که اگر کلیدها حداکثر به دو لامپ مختلف متصل باشند، نمی‌توان به صورت قطعی در مورد وضعیت اتصالات نظر داد. چرا که اگر همه‌ی کلیدها به یک لامپ متصل باشند، پس از زدن هر جفت کلید، وضعیت هیچ لامپی تغییر نخواهد کرد و فقط می‌توانیم بفهمیم همه‌ی کلیدها به لامپ یکسانی متصل هستند ولی لامپ مورد نظر مشخص نمی‌شود. هم‌چنین اگر کلیدها به دقیقاً دو لامپ متصل باشند، صرفاً می‌توانیم آن دو لامپ و کلیدهای هر دسته (که به یکی از آن دو لامپ متصل است) را تشخیص دهیم ولی این که کدام دسته به کدام لامپ متصل است، قابل تشخیص نیست.
پس برای شمردن جواب از اصل متمم استفاده می‌کنیم و برای حالت متمم نیز روی تعداد لامپ‌های درگیر حالت‌بندی می‌کنیم.

$$۵^۵ - \left[۵ + \binom{۵}{۲} \times (۲^۵ - ۲)\right] = ۲۸۲۰$$

□

پوپک و پرستو مشغول انجام یک بازی هستند. بازی آن‌ها به این صورت است که ابتدا پوپک یک عدد طبیعی مانند k را انتخاب می‌کند با این شرط که $۱ \leqslant k \leqslant ۲۰$. سپس پرستو سعی می‌کند عدد پوپک را حدس بزند. پرستو می‌تواند از پوپک تعدادی پرسش کند. در هر پرسش، پرستو یک عدد طبیعی مانند n را به پوپک می‌گوید و پوپک باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر k را به پرستو می‌گوید. هدف پرستو پیدا کردن عدد انتخاب شده توسط پوپک است.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۳ کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱ ۵) ۲

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

پرستو همواره می‌تواند با ۱ پرسش عدد پوپک را پیدا کند. او می‌تواند عدد $۲۰! - ۱$ را بگوید و اگر جواب پوپک عدد x بود، عدد انتخاب شده توسط پوپک $x + ۱$ خواهد بود. می‌دانیم عدد $۲۰!$ به تمامی اعداد ۱ تا ۲۰ بخش‌پذیر است. پس اگر عدد پوپک k باشد، باقی‌مانده‌ی $۲۰! - ۱$ بر k برابر $k - ۱$ خواهد شد. □

۱۴ اگر اعدادی که پرستو می‌تواند بپرسد، حداکثر ۲۰ باشند ($۱ \leqslant n \leqslant ۲۰$)، کم‌ترین تعداد پرسشی که پرستو بتواند در هر حالت، عدد پوپک را به درستی حدس بزند، چند است؟

۱) ۱ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۴ درست است.

پرستو همواره می‌تواند با ۲ پرسش عدد پوپک را پیدا کند. ابتدا اثبات می‌کنیم پرستو حداقل ۲ پرسش نیاز دارد. فرض می‌کنیم اولین عددی که پرستو می‌پرسد عدد x است. اگر $x = ۱$ باشد، در این صورت اگر $k > ۱$ باشد، پاسخ پوپک همواره ۱ است. لذا پرستو نمی‌تواند تنها با این پرسش عدد پوپک را بفهمد. در صورتی که $x > ۱$ باشد، اگر عددی که پوپک انتخاب کرده x یا ۱ باشد، در هر دو حالت، باقی‌مانده‌ی عدد پرستو به عدد پوپک ۰ خواهد بود. پس پرستو نمی‌تواند همواره با ۱ پرسش عدد پوپک را با اطمینان تشخیص دهد. حال روشی برای پرستو ارائه می‌دهیم تا بتواند با ۲ پرسش عدد پوپک را پیدا کند. فرض می‌کنیم عددی که پوپک انتخاب کرده k است. در گام اول، عدد ۲۰ را می‌پرسیم و اگر جواب پوپک به ما x باشد، در پرسش بعدی، عدد $۲۰ - x - ۱$ را می‌پرسیم. اگر جواب پرسش دوم عدد y باشد، عدد انتخاب شده توسط پوپک $y + ۱$ خواهد بود. علت این است که می‌دانیم باقی‌مانده‌ی ۲۰ بر k برابر x است. پس عدد $۲۰ - x$ بر k بخش پذیر است. لذا باقی‌مانده‌ی $۲۰ - x - ۱$ بر k برابر $k - ۱$ خواهد بود.

□

در کشور سلطان، ۱۳ شهر با شماره‌های ۱ تا ۱۳ وجود دارد که بین بعضی جفت‌های آن‌ها جاده‌ی خاکی وجود دارد. می‌دانیم که از هر شهر می‌توان با طی کردن تعدادی جاده‌ی خاکی به هر شهر دیگر رفت. هم‌چنین می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد. سلطان می‌خواهد تعدادی از جاده‌های خاکی کشورش را آسفالت کند طوری که کم‌ترین تعداد جاده آسفالت شوند و بتوان تنها با استفاده از جاده‌های آسفالت شده بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ مسافرت کرد. فرض کنید نقشه‌ی جاده‌های خاکی را نمی‌دانیم اما می‌دانیم کمینه‌ی تعداد جاده‌هایی که باید آسفالت شوند برابر با k است. با دانستن مقدار k، نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده چند حالت متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

دو نقشه‌ی جاده‌های آسفالت شده را متفاوت در نظر می‌گیریم اگر دو شهر باشند که در یک نقشه، بین این دو شهر جاده‌ی آسفالت شده وجود داشته باشد و در نقشه‌ی دیگر خیر.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۵ جواب سوال را با فرض $k = ۴$ به دست آورید.

۱) ۲۷۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۱۰۸۰ ۴) ۸۱۰ ۵) ۱۳۵

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

مسئله را در قالب گراف بررسی می‌کنیم. با توجه به کمینه بودن تعداد یال‌ها، به وضوح گراف ما درخت است و تنها رأس‌های ۱، ۲ و ۳ می‌توانند برگ باشند.
با توجه به این که می‌دانیم بین شهرهای ۱، ۲ و ۳ هیچ جاده‌ی خاکی‌ای وجود ندارد، برای متصل شدن شهرها به یکدیگر در این قسمت مسئله دو حالت وجود دارد. یک حالت این است که هر سه رأس ما برگ باشند که به دو رأس دیگر برای متصل کردن این سه برگ نیاز داریم. حالت دیگر هم این است که دو تا از رأس‌های ما برگ باشند و رأس دیگر در میانه‌ی یک مسیر به طول ۴ ظاهر شود.

$$\binom{۳}{۲} \times ۱۰ \times ۹ + \binom{۳}{۲} \times ۱۰ \times ۹ = ۲۷۰$$

□

۱۶ جواب سوال را با فرض $k = ۱۲$ به دست آورید.

۱) $۸۸ \times ۱۰!$ ۲) $۸۵ \times ۱۰!$ ۳) $۸۲ \times ۱۰!$ ۴) $۵۵ \times ۱۰!$ ۵) $۱۳۲ \times ۱۰!$

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

باز هم مانند قسمت قبل، روی تعداد برگ‌های درخت حاصل حالت‌بندی می‌کنیم. اگر سه برگ داشته باشیم، می‌توان دریافت که یک رأس مرکزی در گراف وجود دارد که سه مسیر از آن منشعب می‌شوند. در این حالت، ابتدا آن رأس را انتخاب کرده و سپس به ترتیب، شروع به چیدن بقیه‌ی رأس‌ها می‌کنیم.
در حالت دیگر، مسیری به طول ۱۲ ایجاد می‌شود که در این حالت نیز ابتدا برگ‌ها را انتخاب کرده، سپس مکان رأس سوم را دقیق می‌کنیم و پس از آن بقیه‌ی رأس‌ها را جایگشت می‌دهیم.

$$۱۰ \times (۳ \times ۴ \times \ldots \times ۱۱) + \binom{۳}{۲} \times ۹ \times ۱۰! = ۱۰! \times (۵۵ + ۲۷) = ۱۰! \times ۸۲$$

□

$۲k$ نفر با شماره‌های ۱ تا $۲k$ به ترتیب ساعت‌گرد دور یک دایره نشسته‌اند و می‌خواهند با یکدیگر بازی کنند. افراد ۱ تا k تیم اول، و افراد $k + ۱$ تا $۲k$ تیم دوم را تشکیل می‌دهند. در ابتدا، توپی در دست نفر شماره‌ی ۱ است. در هر نوبت، فردی که توپ را در دست دارد، آن را به یکی از t نفر بعدی‌اش (در ترتیب ساعت‌گرد) می‌دهد. تیمی که بعد از n نوبت، توپ در دست یکی از اعضای آن باشد، برنده می‌شود. می‌گوییم به ازای مقادیر

مشخص k، t و n، یک تیم «استراتژی بُرد» دارد، اگر اعضای آن بتوانند در برابر هر شیوه‌ای از بازی تیم مقابل، طوری بازی کنند که حتماً برنده‌ی بازی شوند.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۷ اگر $k = ۲$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعضای $\{۵, ۶, ۱۰, ۱۵\}$، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۰ ۲) ۴ ۳) ۱ ۴) ۲ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

نشان می‌دهیم تیمی که توپ در دستان نفر اول آن تیم است استراتژی برد دارد، اگر و تنها اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۳ برابر ۰ یا ۱ باشد. با استقرا روی مقدار n این حکم را اثبات می‌کنیم. پایه‌های استقرا به ازای $n \in \{۰, ۱, ۲\}$ به راحتی قابل اثبات است. با فرض این که حکم به ازای تمامی مقادیر n' (برای $۰ \leqslant n' < n$) درست است، حکم را برای n اثبات می‌کنیم.
با توجه به باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۳، مسئله را به ۳ حالت تقسیم می‌کنیم:

- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۳ برابر ۰ باشد، کافی است نفر شماره‌ی ۱ توپ را به نفر شماره‌ی ۳ بدهد. توپ در دستان نفر اول تیم دوم است و باقی‌مانده‌ی تقسیم $n - ۱$ بر ۳ برابر ۲ می‌باشد. طبق فرض استقرا، تیم دوم استراتژی برد ندارد، پس در این حالت تیم اول استراتژی برد دارد.
- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۳ برابر ۱ باشد، کافی است نفر شماره‌ی ۱ توپ را به نفر شماره‌ی ۲ از تیم خودش دهد و در مرحله‌ی بعد نفر شماره‌ی ۲ توپ را به نفر شماره‌ی ۳ بدهد. به بازی مشابهی می‌رسیم که توپ در دستان نفر اول تیم دوم است و باقی‌مانده‌ی تقسیم $n - ۲$ بر ۳ برابر ۲ می‌باشد. طبق فرض استقرا، تیم دوم استراتژی برد ندارد، پس تیم اول استراتژی برد دارد.
- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۳ برابر ۲ باشد، تیم اول هر کاری کند، تیم دوم استراتژی برد دارد. اگر در مرحله‌ی اول، نفر شماره‌ی ۱ توپ را به نفر شماره‌ی ۳ بدهد، بازی به حالت $n - ۱$ می‌رود که طبق فرض استقرا، در آن تیم اول (تیم دوم در مسئله‌ی اصلی) استراتژی برد دارد. اگر در مرحله‌ی اول، نفر شماره‌ی ۱ توپ را به نفر شماره‌ی ۲ دهد، در مرحله‌ی بعدی نفر شماره‌ی ۲ به هر حال توپ را به یکی از اعضای تیم دوم می‌دهد. هر کدام از اعضای تیم دوم، کافی است توپ را به نفر شماره‌ی ۱ بدهند تا بازی به حالت $n - ۳$ برسد که در آن، طبق فرض استقرا تیم دوم استراتژی برد دارد.

□

۱۸ اگر $k = ۱۰$ و $t = ۲$ باشد، به ازای چند مقدار n از میان اعداد ۱ تا ۳۰، تیم اول استراتژی برد دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰ ۵) ۲۰

پاسخ: گزینه‌ی ۵ درست است.

مقدار $w_{n,i}$ را (برای $۱ \leqslant i \leqslant ۲k$) به این صورت تعریف می‌کنیم:

- $w_{n,i} = ۱$ است اگر توپ در ابتدا دست نفر شماره‌ی i باشد و بعد از n مرحله بازی بهینه‌ی نفرات، به شخصی از تیم اول برسد (تیم اول برنده‌ی بازی شود).

- $w_{n,i} = ۰$ است اگر توپ در ابتدا دست نفر شماره‌ی i باشد و بعد از n مرحله بازی بهینه‌ی نفرات، به شخصی از تیم دوم برسد (تیم دوم برنده‌ی بازی شود).

این دنباله را به صورت بازگشتی پیدا می‌کنیم:
برای $۱ \leqslant i \leqslant k$:

$$w_{n,i} = w_{n-۱,i+۱} \text{ or } w_{n-۱,i+۲}$$

و برای $k+۱ \leqslant i \leqslant ۲k$:

$$w_{n,i} = ۱ - w_{n,i-k}.$$

با استفاده از این رابطه‌ی بازگشتی، مسئله قابل حل است. هم‌چنین با پیدا کردن الگو و استقرا می‌توان نشان داد که اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۱۵ حداکثر ۹ باشد، تیم اول استراتژی برد دارد.

□

گرافی با ۱۴۰۱ رأس و ۱۴۰۱ یال داریم که رأس‌های آن با اعداد ۱ تا ۱۴۰۱ شماره‌گذاری شده‌اند. به ازای هر i ($۱ \leqslant i \leqslant ۱۴۰۰$)، رأس‌های i و $i+۱$ با یک یال به هم متصل هستند. رأس‌های با شماره‌های ۱ و ۱۴۰۱ نیز با یک یال به هم متصل هستند. به مجموعه‌ای از رأس‌ها مستقل گوییم اگر هیچ یالی بین رأس‌های آن وجود نداشته باشد. به مجموعه‌ی مستقل با بیش‌ترین اندازه، بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گفته می‌شود.

با توجه به توضیحات بالا به ۲ سوال زیر پاسخ دهید

۱۹ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل یکی کم‌تر شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۱

پاسخ: گزینه‌ی ۲ درست است.

اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گراف اولیه ۷۰۰ است. با اضافه کردن ۳ یال جدید $(۱,۳)$ ، $(۴,۶)$ و $(۷,۹)$ اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل به ۶۹۹ می‌رسد؛ حداکثر یک رأس از رأس‌های ۱ تا ۳، یک رأس از رأس‌های ۴ تا ۶ و یک رأس از رأس‌های ۷ تا ۹ در مجموعه مستقل حضور دارد. اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل ۱۳۹۲ رأس باقی‌مانده هم ۶۹۶ است. پس اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گراف حاصل ۶۹۹ می‌شود. حال نشان می‌دهیم با دو یال اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل ۷۰۰ می‌ماند. بدون کاستن از کلیات مسئله، فرض کنید یکی از یال‌های اضافه شده به رأس با شماره‌ی ۱۴۰۱ وصل شده است. بقیه‌ی رأس‌ها را به دو دسته با شماره‌های زوج و فرد تقسیم می‌کنیم. قبل از اضافه کردن یال دوم، هر کدام از این دو دسته یک مجموعه مستقل ۷۰۰ رأسی هستند. بعد از اضافه کردن یال دوم، حداقل یکی از دسته‌ها هم‌چنان مجموعه مستقل باقی می‌ماند.

□

۲۰ حداقل چند یال باید به گراف اضافه کنیم تا اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل آن حداقل دو تا کم‌تر شود؟

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴ ۵) ۳

پاسخ: گزینه‌ی ۳ درست است.

یال‌های (۱,۳) ، (۴,۶) ، (۷,۹) ، (۱۰,۱۲) و (۱۳,۱۵) را به گراف اضافه می‌کنیم. از میان رأس‌های ۱ تا ۱۵ حداکثر ۵ رأس در مجموعه مستقل حضور دارند. از ۱۳۸۶ رأس باقی‌مانده نیز حداکثر ۶۹۳ رأس در مجموعه مستقل هستند. پس اندازه‌ی بزرگ‌ترین مجموعه مستقل گراف حاصل ۶۹۸ است. حال نشان می‌دهیم با اضافه کردن حداکثر ۴ یال، مجموعه مستقلی با اندازه‌ی ۶۹۹ وجود دارد. بدون کاستن از کلیات مسئله، فرض کنید یکی از یال‌های اضافه شده به رأس با شماره‌ی ۱۴۰۱ وصل شده است. مشابه قسمت قبل، بقیه‌ی رأس‌ها را به دو دسته‌ی ۷۰۰ رأسی با شماره‌های زوج و فرد تقسیم می‌کنیم. طبق اصل لانه کبوتری، حداقل یک دسته وجود دارد که حداکثر ۱ یال جدید بین دو رأس در آن دسته اضافه می‌شود. بدون کاستن از کلیات مسئله، فرض کنید در دسته‌ی رؤوس با شماره‌ی زوج حداکثر یک یال جدید اضافه شده و آن یال بین رأس‌های با شماره‌های ۲ و ۴ باشد. رأس‌های ۱۴۰۰ ,... ,۴,۶ یک مجموعه مستقل با اندازه‌ی ۶۹۹ تشکیل می‌دهند.

□