پاسخ تشریحی

هشتمین المپیاد کامپیوتر

۱. علی ۱۲ تیر بیش از سهمیهٔ خود شلیک کرده است و چون با به هدف زدن یک تیر دو تیر جایزه می‌گیرد، بنابراین علی ۶ بار به هدف زده است.

۲. تعداد امتحان‌ها را n و مجموع نمرات غیر از نمرهٔ امتحان آخر را x درنظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \frac{x+۹۷}{n}=۹۰ \\ \frac{x+۷۳}{n}=۸۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۹۰n-x=۹۷ \\ ۸۷n-x=۷۳ \end{cases} \Rightarrow ۳n=۲۴ \Rightarrow n=۸$$

۳. دنبالهٔ خواسته شده به‌صورت ... , ۱۶ , ۸ , ۴ , ۲ , ۱ می‌باشد. یادآوری می‌شود که:

$$x^{۰}+x^{۱}+x^{۲}+\ldots+x^{n-۱}=\frac{x^{n}-۱}{x-۱}$$

۴. a) دو عدد منتخب یا هر دو زوج هستند و یا هر دو فرد، بنابراین:

$$a=\binom{۵۰}{۲}+\binom{۵۰}{۲}=۲۴۵۰$$

b) یکی از اعداد منتخب زوج و دیگری فرد است، بنابراین:

$$b=\binom{۵۰}{۱}\cdot\binom{۵۰}{۱}=۲۵۰۰$$

منبع: المپیاد کامپیوتر در ایران (مرحله اول)، تألیف رسول حاجی زاده، انتشارات دانش پژوه، ۱۳۸۵

۵. اگر خانهٔ ❊ از جدول شماره ۱ را با ۳ پر کنیم آنگاه جدول به شکل جدول شماره ۲ و اگر آن خانه را با ۴ پر کنیم آنگاه آن جدول به شکل جدول شماره ۳ پر خواهد شد.

۱	۲		
❊	۱	۲	
		۱	

شماره ۱

۱	۲	۴	۳
۳	۱	۲	۴
۴	۳	۱	۲
۲	۴	۳	۱

شماره ۲

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

شماره ۳

۶. تعداد اعداد بزرگتر یا مساوی ۱۵ در اعداد داده شده ۹ عدد می‌باشد که همهٔ آنها را انتخاب می‌کنیم. مجموع اعداد منتخب از میانگین ۱۵ به‌اندازهٔ ۱ + ۳ + ۰ + ۱ + ۸ + ۱ + ۰ + ۲ + ۶ یعنی ۲۲ واحد بیشتر دارد پس از اعداد باقی‌مانده نیز تعدادی (از بزرگ به کوچک) چنان انتخاب می‌کنیم که مجموع کمبودهای آنها از ۱۵ کمتر یا مساوی ۲۲ باشد. به این منظور اعداد زیر را نیز انتخاب می‌کنیم:

۱۴ , ۱۴ , ۱۳ , ۱۲ , ۱۲ , ۱۱ , ۹

مجموع کمبودهای اعداد انتخاب شده از ۱۵ برابر ۲۰ می‌باشد که اگر عدد بعدی یعنی ۸ نیز انتخاب شود آنگاه مجموع این کمبودها برابر ۲۷ شده و از ۲۲ بزرگتر می‌شود، بنابراین علاوه بر ۹ عدد ذکر شده، ۷ عدد دیگر نیز می‌توانیم انتخاب کنیم.

۷. راه حل اول: زیرمجموعه‌های ۰ و ۱ عضوی همگی مطلوب هستند. به غیر از زیرمجموعه‌های {۱ , ۲} ، {۲ , ۳} ، {۳ , ۴} ، {۴ , ۵} و {۵ , ۶} همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مطلوب هستند. از بین زیرمجموعه‌های سه عضوی فقط زیرمجموعه‌های {۵ , ۲ , ۱} ، {۶ , ۳ , ۱} ، {۶ , ۴ , ۱} و {۲ , ۴ , ۶} مطلوب هستند. بنابراین تعداد زیر مجموعه‌های مطلوب برابر $۴+\left[\binom{۶}{۲}-۵\right]+\binom{۶}{۱}+\binom{۶}{۰}$ یعنی ۲۱ می‌باشد.

راه حل دوم: مسأله را در حالت کلی برای مجموعهٔ $A = \{۱ , ۲ , ۳ , ... , n\}$ حل می‌کنیم. تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب را در این حالت a_n درنظر می‌گیریم و این زیرمجموعه‌ها را به دو دسته تقسیم می‌کنیم:

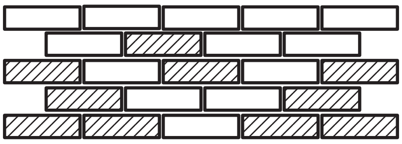
I) آنهای که n را دارند. هیچ یک از این زیرمجموعه‌ها $n - ۱$ را ندارند و مابقی اعضای آنها اعضای

مطلوبی از مجموعهٔ $\{۱ , ۲ , ۳ , ... , n - ۲\}$ می‌باشد که تعداد این زیرمجموعه‌ها برابر $a_{n-۲}$ می‌باشد.

II) آنهایی که n را ندارند. در این حالت هر یک از زیرمجموعه‌ها، زیرمجموعه‌های مطلوبی از مجموعهٔ $\{۱ , ۲ , ۳ , ... , n - ۱\}$ می‌باشد که تعداد این زیرمجموعه برابر $a_{n-۱}$ می‌باشد.

بنابراین رابطهٔ $a_n = a_{n-۱} + a_{n-۲}$ برقرار است که چون $a_۱ = ۲$ و $a_۲ = ۳$ مقادیر $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$ به‌ترتیب برابر ۵، ۸، ۱۳ و ۲۱ به‌دست می‌آیند.

۸. آجرهای برداشته شده در شکل مقابل هاشور خورده است.



هر آجر حداکثر دو آجر از ردیف بالایی خود را محافظت می‌کند، چون از ردیف بالا حق حذف هیچ آجری را نداریم پس در ردیف دوم از بالا حداقل سه آجر برای محافظت از پنج آجر بالایی باقی می‌ماند. برای محافظت از سه آجر، در ردیف سوم از بالا حداقل دو آجر باقی می‌ماند و چون این دو آجر پیش هم نیستند در ردیف پایینی آن یعنی ردیف چهارم حداقل دو آجر باید باقی بماند. در ردیف آخر نیز باقی ماندن حداقل یک آجر الزامی است. پس تعداد کل آجرهای باقی‌مانده حداقل ۱ + ۲ + ۲ + ۳ + ۵ یعنی ۱۳ بوده و درنتیجه تعداد آجرهای حذف شده حداکثر ۱۰ می‌تواند باشد.

۹. چون در هر سال حداکثر یکی از محصولات سال قبل کشت می‌شود، بنابراین در هر سال هر دو محصول کاشته نشده در سال قبل کشت می‌شود. بنابراین محصولات کاشته شده در سال دوم کدو، نخود و لوبیا و محصولات کاشته شده در سال سوم ذرت، کلم و لوبیا می‌باشد.

۱۰. اگر افراد به‌ترتیب شماره‌هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان‌های معطلی برابر:

$۱۰ \times ۱ + ۹ \times ۲ + ۸ \times ۳ + ... + ۱ \times ۱۰$

یعنی ۲۱۸ دقیقه و اگر به‌ترتیب عکس شماره‌هایشان در صف قرار گیرند آنگاه مجموع زمان‌های معطلی برابر $۱ \times ۱ + ... + ۸ \times ۸ + ۹ \times ۹ + ۱۰ \times ۱۰$ یعنی ۳۸۵ دقیقه خواهد بود. حالت اول حداقل مجموع زمان‌های معطلی را دارد زیرا اگر نفر iام بعد از نفر jام $(i < j)$ در صف قرار گیرند با جابه‌جایی آن دو نفر مجموع کل معطلی به‌اندازه $j - i$ دقیقه کاهش می‌یابد. به همین ترتیب ثابت می‌شود که حالت دوم نیز حداکثر مجموع زمان‌های معطلی را دارد.

۱۱. جملهٔ «من احمق هستم» را هر دو نفر تبه‌کارِ باهوش و تبه‌کارِ احمق می‌توانند بگویند. جملهٔ «من درست‌کارِ احمق هستم» را فقط تبه‌کارِ باهوش می‌تواند بگوید.

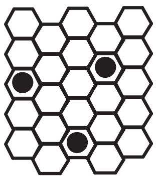
جملهٔ «من دست‌کارِ باهوش هستم» را هر سه نفرِ درست‌کارِ باهوش، درست‌کارِ احمق و تبه‌کارِ باهوش می‌توانند بگویند.

و بالاخره جملهٔ «من تبه‌کار هستم» را هر دو نفرِ درست‌کارِ احمق و تبه‌کارِ احمق می‌توانند بگویند.

۱۲. از دو مکالمهٔ اول معلوم می‌شود که یکی از دو نفر A و B راستگو و دیگری دروغگوست. اگر B راستگو باشد پس گفتهٔ او صحت دارد یعنی A گفته است: «من یک درست‌کارِ احمق یا یک تبه‌کارِ باهوش هستم»، که اگر A دروغگو باشد این جمله را نمی‌تواند بیان کند.

بنابراین A راستگو و B دروغگو است. چون A راستگو است پس جملهٔ او یعنی «B احمق است» صحت دارد، یعنی B احمق درست‌کار می‌باشد (به‌خاطر دروغگو بودنش). و چون B دروغگو است پس جملهٔ او یعنی «A تبه‌کار است» نادرست بوده و A درست‌کار است. چون A راستگو است پس او درست‌کارِ باهوش می‌باشد.

۱۳. هر وزیر حداکثر دو خانه از خانه‌های غیر ستون خود را تهدید می‌کند، چون در هر ستون پنج خانه وجود دارد، پس در صورت موجود بودن وزیر در ستون‌های i و j خانه‌ای از ستون k تهدید نشده باقی می‌ماند، بنابراین وجود حداقل ۳ وزیر الزامی است. با سه وزیر مطابق شکل مقابل می‌توان تمام خانه‌ها را تهدید کرد:



۱۴. در دو ریل بالا و پایین دنباله‌ای نزولی وجود دارد، پس دنبالهٔ خروجی در درون خون دو دنبالهٔ نزولی دارد. دنبالهٔ الف را به دنباله‌های نزولی «۳ , ۲ , ۱» و «۵ , ۴»، دنبالهٔ ج را به دنباله‌های نزولی «۱» و «۵ , ۴ , ۳ , ۲»، دنبالهٔ د را به دنباله‌ای نزولی «۴ , ۱» و «۵ , ۳ , ۲» و بالاخره دنبالهٔ ه را به دنباله‌های نزولی «۲ , ۱» و «۵ , ۴ , ۱» تجزیه می‌کنیم. ولی گزینهٔ ب امکان تجزیه شدن به دو دنبالهٔ نزولی را ندارد.

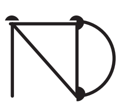
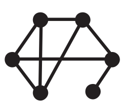
۱۵. راه حل اول: با رسم یک دایره از یک نقطهٔ تقاطع تا تقاطع بعدی یک و فقط یک ناحیه اضافه می‌شود. چون هر دایره، دایرهٔ دیگر را حداکثر در دو نقطه قطع می‌کند پس تعداد کل نقاط تقاطع دایرهٔ جدید با دایره‌های قبل حداکثر ۲n شده و درنتیجه تعداد نواحی ایجاد شده حداکثر ۲n می‌باشد.

راه حل دوم: یک دایره صفحه را به دو ناحیه تقسیم می‌کند که با رسم دایرهٔ دوم به‌صورت متقاطع با دایرهٔ اول تعداد نواحی برابر ۴ شده و تعداد آن نواحی از ۲ به ۴ تغییر می‌کند. بنابراین به‌ازای $n = ۱$ جواب مورد نظر ۲ شده و گزینه‌های الف و هـ رد می‌شوند. با رسم دایره سوم به‌صورت متقاطع با هر دو دایرهٔ قبل تعداد نواحی از ۴ به ۸ افزایش می‌یابد یعنی به‌ازای $n = ۲$ جواب مورد نظر ۴ می‌شود، بنابراین گزینه‌های ب و ج نیز رد می‌شوند.

۱۶. اگر رقم یکان x برابر ۰ باشد آنگاه رقم یکان y، ده حالت، اگر رقم یکان x برابر ۱ باشد آنگاه رقم یکان y، نه حالت (غیر از ۹)، اگر رقم یکان x برابر ۲ باشد آنگاه رقم یکان y، هشت حالت، ... و بالاخره اگر رقم یکان x برابر ۹ باشد آنگاه رقم یکان y، یک حالت (فقط ۰) می‌تواند داشته باشد پس رقم یکان دو عدد بر روی هم $۱ + ... + ۸ + ۹ + ۱۰$ یعنی ۵۵ حالت، به همین ترتیب رقم دهگان و صدگان دو عدد هر یک بر روی هم ۵۵ حالت و رقم هزارگان نیز فقط یک حالتِ «۱ ، ۱» را دارا هستند، بنابراین تعداد اعداد مطلوب برابر $۵۵^۳$ می‌باشد.

۱۷. چهار نمایش مورد نظر به شکل‌های ۲۵، $۳\overline{۵}$، $۱\overline{۷}\,\overline{۵}$ و $۱\overline{۸}۵$ می‌باشد.

۱۸. به‌ازای انتخاب هر سه نقطه یک مثلث پدید می‌آید مگر آن که آن سه نقطه در یک امتداد باشند. در شکل داده شده شش دستهٔ سه‌تایی در یک امتداد مشاهده می‌شود، بنابراین تعداد مثلث‌های مطلوب برابر $\binom{۷}{۳} - ۶$ یعنی ۲۹ می‌باشد.

۱۹. تعداد شهرهای استان را n در نظر می‌گیریم، بنابراین تعداد جاده‌ها برابر $\frac{(n - ۱) \times ۳ + ۱}{۲}$ یا $\frac{۳n - ۲}{۲}$ می‌باشد. شرط لازم برای آن که عدد به‌دست آمده صحیح باشد آن است که n زوج باشد. به‌ازای $n = ۴$ به شکل  و به‌ازای $n = ۶$ به شکل  می‌رسیم.

برای این که سؤال فقط یک گزینهٔ صحیح داشته باشد حدس بر این است که منظور طراح آن بوده است که بین هیچ دو شهری دو جادهٔ متمایز وجود ندارد یعنی $n = ۴$ نمی‌تواند درست باشد.

۲۰. بدترین حالت این است که همهٔ مکعب‌ها به غیر از مکعب‌های زیری به روی میز منتقل شده و سپس همهٔ آنها در یک ردیف بر روی هم چیده شوند، برای قسمت اول ۷ حرکت و برای قسمت دوم ۱۰ حرکت لازم است.

۲۱. دروس A، C، I و G به‌ترتیب در ترم‌های اول، دوم، سوم و چهارم گذرانده می‌شوند. دروس B، E و F نیز به‌ترتیب در ترم‌های اول، دوم و سوم گذرانده می‌شوند. برای دروس D و H سه حالت متفاوت به‌ترتیب به شکل‌های (دوم، سوم) یا (دوم، چهارم) و یا (سوم، چهارم) می‌تواند وجود داشته باشد.

۲۲. ماتریس مطلوب به شکل مقابل می‌باشد:

$$
\begin{matrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\
0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & 0 \\
0 & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} & 0
\end{matrix}
$$

۲۳. برای ساختن رشتهٔ bbbbbaaaa از روی رشتهٔ babababba، ۹ مرحله لازم است زیرا b ها از سمت چپ به‌ترتیب از روی ۰، ۱، ۲، ۳ و ۳ عدد a رد شده‌اند که مجموعاً ۹ جابه‌جای می‌شود. به همین ترتیب معلوم می‌شود که برای ساختن دنبالهٔ aaaabbbbb از روی دنبالهٔ داده شده ۱۱ مرحله لازم است.

۲۴. تعداد پاره‌خط متصل به هر نقطه را درجهٔ آن نقطه می‌نامیم. به‌ازای هر دو نقطه با درجهٔ فرد یک بار

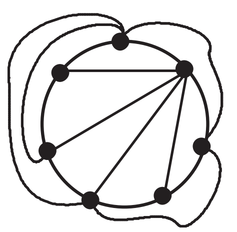
قلم از روی کاغذ برداشته می‌شود، چون تعداد این نقاط ۱۰ می‌باشد پس حداقل چهار بار قلم از روی کاغذ برداشته می‌شود (برداشت آخر از روی کاغذ نباید شمرده شود).

۲۵. ابتدا با توجه به قضیهٔ اولر ثابت می‌کنیم تعداد جاده‌های مورد نظر نمی‌تواند بیش از ۸ جاده باشد. قضیهٔ اولر به یکی از دو صورت زیر بیان می‌شود:

I) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال‌ها و f تعداد وجوه یک چند وجهی باشد آنگاه $e + ۲ = v + f$.

II) اگر v تعداد رئوس، e تعداد یال‌ها و f تعداد نواحی موجود در یک گراف همبند باشد (ناحیهٔ نامحدود خارجی نیز شمرده می‌شود) آنگاه $e + ۲ = v + f$.

هر ناحیه در دور خود حداقل سه یال دارد، بنابراین تعداد یال‌های موجود در دور تمام نواحی حداقل برابر ۳f می‌باشد ولی چون هر یال دقیقاً مرز دو ناحیه می‌باشد، با این شمارش هر یک از آنها دو بار شمارش می‌شوند، بنابراین:



$$۲e \geq ۳f \Rightarrow ۲e \geq ۳(e + ۲ - ۷) \Rightarrow e \leq ۱۵$$

چون در شکل داده شده ۷ یال رسم شده پس حداکثر ۸ یال دیگر مطابق شکل مقابل می‌توان رسم کرد:

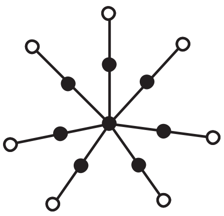
۲۶. به نظر می‌رسد که باید علامت‌ها را یک در میان به جمع تبدیل کرد زیرا در غیر این صورت حداقل دو علامت ضرب پشت سر هم قرار گرفته و عدد به سمت مینیمم شدن سوق پیدا نمی‌کند. بنابراین مینیمم مقدار A برابر $۸ + ۷ \times ۲ + ۳ \times ۴ + ۶ \times ۵$ یعنی ۶۴ خواهد شد.

۲۷. رقم یکان یکی از چهار حالت 3، 4، 8 یا 9 و رقم دهگان یکی از دو حالت 3 یا 5 را می‌تواند داشته باشد، بنابراین طبق اصل ضرب جواب مورد نظر برابر ۸ می‌باشد.

۲۸. اگر مرکز وسطی غیر فعال شود، آنگاه هر ۷ شهر متصل به آن فعال و هر ۷ شهر انتهایی غیر فعال می‌شوند، یعنی در این صورت فقط یک حالت انتخاب وجود دارد.

اگر مرکز وسطی فعال شود، آنگاه هر یک از ۷ شاخه یکی از دو وضعیت ○—●—● یا ●—○—● را

می‌تواند داشته باشد (● نشانهٔ فعال بودن و ○ نشانگر غیرفعال بودن مرکز می‌باشد). از $۲^۷$ حالت ایجاد شده فقط حالتِ مقابل قابل قبول نیست. زیرا با غیرفعال کردن مرکز وسطی خیابانی با دو سر غیرفعال یافت نمی‌شود.

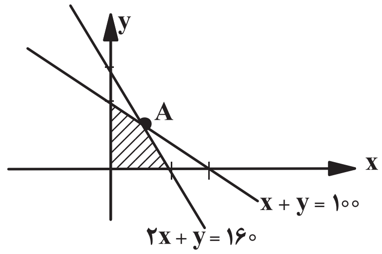


بنابراین تعداد کل حالات برابر $۱ + ۲^۷ - ۱$ یعنی ۱۲۸ می‌باشد.

۲۹. در مرحلهٔ پنجم هر ۸ عدد موجود بر روی دایره برابر ۳ می‌شود که از آن مرحله به بعد وضعیت تغییر نمی‌کند، بنابراین جواب مطلوب برابر ۳×۸ یعنی ۲۴ می‌باشد.

۳۰. فرض می‌کنیم x کیلو پرتقال و y کیلو سیب خریده باشد آنگاه:

$$x + y \leq ۱۰۰ \quad , \quad ۲۰۰x + ۱۰۰y \leq ۱۶۰۰۰ \ \text{یا} \ ۲x + y \leq ۱۶۰$$



اگر نامعادله‌های فوق را در محورهای مختصات نمایش داده و اشتراک آنها را هاشور بزنیم شکل مقابل به دست می‌آید:

می‌خواهیم $۳۰x + ۲۰y$ ماکزیمم شود، خط $۳۰x + ۲۰y = k$ را چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ A بگذرد در این صورت حاصل $۳۰x + ۲۰y$ ماکزیمم مقدار خود را خواهد داشت. از تلاقی دو خط $x + y = ۱۰۰$ و $۲x + y = ۱۶۰$ مختصات نقطهٔ A به‌صورت $(۶۰ , ۴۰)$ پیدا می‌شود که در این حالت حاصل $۳۰x + ۲۰y$ برابر ۲۶۰۰ می‌شود.

۳۱.

برای هر یک از حالات I و II جدول نتایج به شکل زیر می‌باشد:

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	—
B	A		B	B	—
C	A	B		C	—
D	A	B	C		D
E	—	—	—	D	

II

	A	B	C	D	E
A		A	A	A	A
B	A		B	B	B
C	A	B		C	C
D	A	B	C		—
E	A	B	C	—	

I

اگر نتیجهٔ هر مسابقه‌ای برد و باخت باشد آنگاه مجموعاً ۳ امتیاز به تیم‌ها داده می‌شود و چون در کل ۱۰ بازی انجام می‌شود پس در صورت عدم موجود بودن تساوی در بازی‌ها مجموع امتیازات تیم‌ها ۳۰ می‌شود. مجموع امتیازات حالت III برابر ۲۹ می‌باشد به این معنا که فقط یکی از مسابقات به تساوی کشیده شده است در حالی که تیم آخر دو تساوی دارد (چون دو امتیاز دارد) و این تناقض بیانگر آن است که دنبالهٔ III نمی‌تواند امتیاز تیم‌ها باشد.

۳۲. تعداد مثلث‌ها برابر $\underbrace{۴ + ۴ + ۴ + \dots + ۴}_{n\ \text{تا}} + ۱$ می‌باشد بنابراین:

$$۱ + ۴n = ۴۵ \quad \Rightarrow \quad n = ۱۱$$

۳۳. تعداد اعداد مطلوب ۹ × ۹ × ۹ می‌باشد. به خاطر تقارن معلوم می‌شود که $\frac{۱}{۹}$ این اعداد دارای رقم یکان ۱، $\frac{۱}{۹}$ آنها دارای رقم یکان ۲ ، ... و بالاخره $\frac{۱}{۹}$ آنها دارای رقم یکان ۹ می‌باشند. رقم دهگان وصدگان نیز چنین است، بنابراین:

$$? = (۱ + ۲ + \dots + ۹) \times ۸۱ + (۱ + ۲ + \dots + ۹) \times ۱۰ \times ۸۱ + (۱ + ۲ + \dots + ۹) \times ۱۰۰ \times ۸۱ = ۴۰۴۵۹۵$$

۳۴.

با توجه به جدول مقابل معلوم است که او کار خود را در روز شنبه انجام داده است بنابراین فقط گزارهٔ II صحیح است.

	صبح	بعد از ظهر
شنبه	م ـ B	د
یکشنبه		
دوشنبه	A	B
سه شنبه	د	م
چهارشنبه	د ـ A	م
پنجشنبه		د

۳۵. با توجه به جدول قبل معلوم می‌شود که یکی از معلم‌ها به همراه دفتردار فقط در روزهای شنبه و چهارشنبه در مدرسه حضور دارند.

۳۶. در جدول مقابل برای رسیدن به خانهٔ b اگر از خانهٔ ۱۳ وارد شویم لازم است به خانهٔ ۱۳ از خانهٔ ۱۴ وارد شـویم. بـرای وارد شـدن بـه خـانهٔ ۱۳ از ۱۴ به‌طوری که به راست بپیچیم باید از خانهٔ ۱۹ وارد شویم. برای این که باگردش به‌چپ از ۱۹ به ۱۴ وارد

۴ R	۵	۱۲	۱۳ R	۲۰ b
۳ L	۶ S	۱۱ L	۱۴ R	۱۹ L
۲	۷ L	۱۰ S	۱۵ L	۱۸ L
۱ a	۸ R	۹	۱۶ R	۱۷

شویم باید از خانهٔ ۱۸ به خانهٔ ۱۹ وارد شویم و اگر به همین ترتیب ادامه دهیم دنبالهٔ حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۳ حرکت می‌باشد:

۱ → ۲ → ۷۶ → ۵ → ۱۲ → ۱۱ → ۱۴ → ۱۵ → ۱۸ → ۱۹ → ۱۴ → ۱۳ → ۲۰

اگر برای ورود به خانهٔ b از خانهٔ ۱۹ وارد شویم آنگاه دنبالهٔ حرکت به شکل زیر خواهد بود که ۱۱ حرکت می‌باشد:

۱ → ۲ → ۷ → ۶ → ۵ → ۶ → ۷ → ۱۰ → ۱۵ → ۱۴ → ۱۹ → ۲۰

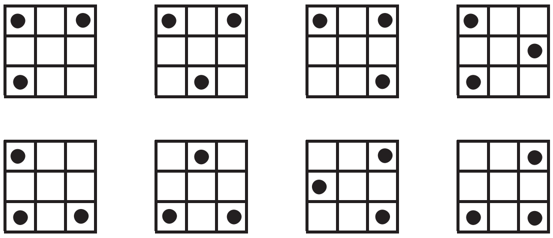
۳۷. بهترین حالت نمایش به شکل زیر می‌باشد:

$$(۱+۱)^{(۱+۱+۱+۱)}+(۱+۱+۱)$$

۳۸. اگر m = n = ۱ آنگاه b = B = ۰، که با جاگذاری گزینه‌های الف، ج و د رد می‌شوند. اگر m = ۱ و n = ۲ آنگاه b = B = ۱ که با جاگذاری گزینهٔ هـ نیز رد می‌شود.

۳۹. با فرض این که چاه در روستای ۱ باشد با انتقال چاه از روستای ۱ به ۲ راه ۵ روستا هر کدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۶ روستا هر کدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بـهتر از روستای ۱ است. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۳ راه ۴ روستا هر کدام یک واحد کم شده ولی در عوض راه ۱۷ روستا هر کدام یک واحد اضافه می‌شود، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۳ می‌باشد. با انتقال چاه از روستای ۲ به روستای ۴ راه ۱۱ روستا هر کدام یک واحد اضافه شده ولی در عوض راه ۱۰ روستا هر کدام یک واحد کم خواهد شد، بنابراین روستای ۲ بهتر از روستای ۴ است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که روستای ۲ از روستای ۵ نیز بهتر است.

۴۰. تمام حالات در اشکال زیر نمایش داده شده‌اند:



۴۱. جدول مطلوب مطابق شکل زیر می‌باشد:

۱	●	●	●
۲	●	●	۱
۳	۱	۲	●
●	۲	۱	●

۴۲. کافی است باقر در هر مرحله دو نقطهٔ x و y را به هم وصل کند که در آن x و y دو رأسی است که اکبر در آن مرحله غیر آن دو رأس را به هم وصل کرده است.

۴۳. I) اگر پنج سکه به رو باشند با انتخاب آن پنج سکه و برگرداندن آنها، به شش سکهٔ پشت خواهیم رسید.

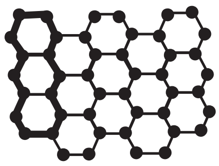
II) اگر دو سکه به رو و چهار سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب چهار سکهٔ پشت و یک سکهٔ رو و برگرداندن آنها، پنج سکهٔ رو و یک سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت I عمل می‌کنیم.

III) اگر سه سکه به رو و سه سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سه سکهٔ رو و دو سکهٔ پشت و برگرداندن آنها، به دو سکهٔ رو و چهار سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت II عمل می‌کنیم.

IV) اگر چهار سکه به رو و دو سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب دو سکهٔ پشت و سه سکهٔ رو و برگرداندن آنها، به سه سکهٔ رو سه سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت III عمل می‌کنیم.

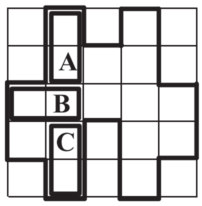
V) اگر یک سکه به رو و پنج سکه به پشت باشند آنگاه با انتخاب سکهٔ رو و چهار سکهٔ پشت و برگرداندن آنها، به چهار سکهٔ رو و دو سکهٔ پشت خواهیم رسید، سپس مثل حالت IV عمل می‌کنیم.

VI) اگر شش سکه به رو باشند آنگاه با انتخاب پنج سکهٔ رو و برگرداندن آنها، به پنج سکهٔ پشت و یک سکهٔ رو خواهیم رسید، سپس مثل حالت V عمل می‌کنیم.



۴۴. هر دو رأسی که فقط شامل دو یال باشند، هر دو یالشان در مسیر شرکت می‌کند، بنابراین قسمت پر رنگ قسمتی از مسیر مطلوب می‌باشد، و اما هر نقطه‌ای نقطهٔ شروع باشد راه برگشتی برای آن وجود ندارد.

۴۵. الگوریتم حرکات به شکل زیر می‌باشد:



B به راست ـ B به پایین

A به پایین ـ A به راست

A به بالا ـ C به بالا ـ B به بالا

B به چپ ـ B به پایین

C به پایین ـ A به پایین ـ C به راست ـ C به بالا

B به بالا ـ B به راست

۴۶. در حالت کلی اگر تعداد سنگریزه‌ها مضربی از ۳ باشد نفر دوم و در غیر این صورت نفر اول می‌تواند برنده باشد. اگر تعداد سنگریزه‌ها ۳n باشد و نفر اول ۱ یا ۴ سنگریزه بر دارد نفر دوم با برداشتن ۲ سنگریزه باز تعداد سنگریزه‌ها را ۳k نگه داشته و در نهایت برنده می‌شود و اگر نفر اولی ۲ سنگریزه بردارد نفر دوم با برداشتن ۱ سنگریزه باز تعداد سنگریزه‌ها را ۳k کرده و برنده می‌شود. اگر تعداد سنگریزه‌ها ۳k + r (۲ یا ۱ = r) باشد آنگاه نفر اول با برداشتن r سنگریزه تعداد سنگریزه‌ها را به ۳k رسانده و ابتکار عمل را به‌دست می‌گیرد.

۴۷. الگوریتم حرکت به‌صورت زیر می‌باشد (در ابتدا فرض می‌کنیم همه در سمت چپ رودخانه باشند):

۲۰ و ۳۰ با هم به سمت راست رفته و ۳۰ پیاده شده و ۲۰ بر می‌گردد.

۲۰ و ۴۰ با هم به سمت راست رفته و ۴۰ پیاده شده و ۲۰ بر می‌گردد.

۲۰ در سمت چپ پیاده شده و ۸۰ به سمت راست رفته پیاده شده و ۳۰ سوار می‌شود.

۳۰ به سمت چپ آمده، پیاده می‌شود و ۸۰ سوار شده به سمت راست می‌رود.

۸۰ در سمت راست پیاده شده و ۴۰ سوار شده به سمت چپ می‌آید.

۴۰ نفرِ ۲۰ را سوار کرده، به سمت راست آورده، آن را پیاده می‌کند و به سمت چپ بر می‌گردد و نفرِ ۳۰ را سوار کرده و با هم به سمت راست رفته و در آنجا پیاده می‌شوند.

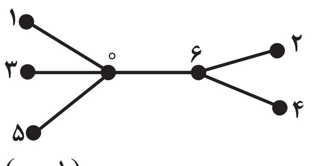
۴۸. به هر یک از جاده‌ها یک عدد صحیح متمایز از اعداد متناظر به جاده‌های دیگر، نسبت می‌دهیم. کافی است به هر یک از رئوس مجموعه‌ای نسبت دهیم که فقط شامل تمام اعداد جاده‌های متصل به آن رأس باشد.

۴۹. با الگوریتم زیر می‌توان جای هر دو عضو دلخواه مانند i و j با فرض این که i قبل از j باشد را عوض کرد:

- ابتدا با توجه به عمل دوم تمام اعضای قبل از i را به انتهای دنباله به‌ترتیب انتقال می‌دهیم.
- با توجه به عمل اول جای i و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می‌دهیم و این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که i و j مجاور باشند، در این مرحله خود i را به انتها منتقل می‌کنیم.
- با توجه به عمل اول جای j و عضو بعد از آن را عوض کرده و سپس با توجه به عمل دوم آن را به انتهای دنباله انتقال می‌دهیم و کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که جای خالی i و j پر شود.
- با توجه به عمل دوم تا جای ممکن اعضا را به انتها انتقال می‌دهیم تا ترتیب اولی ظاهر شود با این تفاوت که جای i و j عوض شده باشد.

با الگوریتم بالا ابتدا ۱ را به ابتدا، سپس ۲ را به جایگاه دوم و ... انتقال می‌دهیم.

۵۰. یکی از جواب‌های مطلوب مطابق شکل مقابل باشد:



۵۱. مجموع اعداد ۱ تا n برابر با $\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} = \overline{aaa} \Rightarrow n(n+۱) = ۲ \times ۱۱۱ \times a = ۶ \times ۳۷ \times a$$

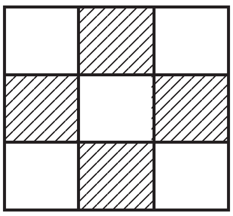
با توجه به تساوی فوق و این که ۳۷ عددی اول است معلوم می‌شود که $۶a$ برابر ۳۶ و درنتیجه a برابر ۶ خواهد بود. بنابراین به‌ازای $n = ۳۶$ مجموع خواسته شده برابر ۶۶۶ می‌شود.

۵۲. مثال مورد نظر به شکل زیر می‌باشد:

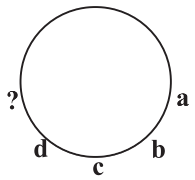
در مدرسهٔ اول فقط ۱۰ دانش‌آموز سال سوم با معدل ۱۶ و ۱۰۰ دانش‌آموز در سال چهارم با معدل ۱۵ موجود باشد. در مدرسهٔ دوم نیز ۱۰ دانش‌آموز سال سوم با معدل ۱۰ و یک دانش‌آموز سال چهارم با معدل ۹ موجود باشد. در این صورت معدل دانش‌آموزان سال سوم برابر ۱۳ و معدل دانش‌آموزان سال چهارم برابر ۱۴/۹۴ خواهد شد.

۵۳. یکی از مسیرهای مطلوب A B C B C B C D E F می‌باشد.

۵۴. اگر جدول را مطابق شکل مقابل شطرنجی کنیم، معلوم می‌شود که در هر مرحله اگر به مجموع اعداد سفید k واحد اضافه شود به مجموع اعداد سیاه نیز k واحد اضافه خواهد شد. در ابتدا مجموع اعداد سفید ۱۴ و مجموع اعداد سیاه برابر ۱۶ می‌باشد. بنابراین هرگز آن دو عدد به‌طور توأم نمی‌توانند صفر شوند.



۵۵. فرض می‌کنیم a با همهٔ افراد، b، c و d دو به دو با هم و e، f و g نیز دو به دو با هم آشنا باشند و هیچ آشنایی دیگری موجود نباشد.



بدون این که به کلیت مسأله لطمه‌ای وارد شود فرض می‌کنیم سمت چپ a نفرِ b باشد، در این صورت سمت چپ b یا باید c نشسته باشد و یا d. در حالت اول نفر بعدی (نفر چهارم) d و در حالت دوم نفر بعدی c خواهد شد، ولی معلوم است که فردی که با d (یا c) آشنا باشد پیدا نمی‌شود تا در جایگاه پنجم بنشانیم.

۵۶. اگر به اعضای هر دو گروه مجموعه‌های یکسانی مانند نفر اول {۲ , ۱} ، نفر دوم {۳ , ۱} و نفر سوم {۳ , ۲} اختصاص دهیم آنگاه انتخاب مطلوب ممکن نخواهد بود.

۵۷. در ترتیب مورد نظر تمام زوج‌هایی مانند (x , y) که x از y باخته و در آن ترتیب x قبل از y (نه لزوماً بلافاصله) را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم این تعداد زوج عددی محدود است. با عمل اشاره شده در صورت مسأله، در هر مرحله تعداد زوج‌های مورد اشاره یکی کم شده و بالاخره بعد از مدتی به صفر خواهد رسید.

۵۸. فرض می‌کنیم $N = ۳$، در این صورت با توجه به گزارهٔ اول معلوم می‌شود که خروجی ماشین برای ورودی ۲۳ عدد ۳ می‌باشد.

با توجه به گزارهٔ دوم معلوم می‌شود که خروجی ماشین به‌ازای ورودی ۳۲۳ عدد ۳۲۳ خواهد شد.

۵۹. اگر ورودی را ۲۷۳ بگیریم با توجه به گزارهٔ اول خروجی ۷۳ می‌شود و با توجه به گزارهٔ دوم به‌ازای ورودی ۳۲۷۳ خروجی ۷۳۲۷۳ می‌شود که همان خواستهٔ مسأله می‌باشد.

۶۰. ورودی مدار اول به‌ترتیب a_7 ، x و a_6 می‌باشد.

ورودی مدار دوم به‌ترتیب خروجی مدار اول، x و a_5 می‌باشد.

ورودی مدار سوم به‌ترتیب خروجی مدار دوم، x و a_4 می‌باشد.

...