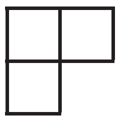
نهمین المپیاد کامپیوتر

بهمن ۷۷

۱. مجموعهٔ اعداد ۱ تا ۱۰ چند زیرمجموعه دارد که مجموع اعضای آن زوج است؟

الف) ۱۲۸   ب) ۲۵۶   ج) ۵۱۱   د) ۵۱۲   هـ) ۵۱۳

۲. حداقل چه تعداد از شکل زیر را می‌توان در یک جدول 5×5 قرار داد، به‌طوری که شکل‌ها روی هم نیفتند و نتوان شکل دیگری از این نوع را به این جدول افزود؟



الف) ۳   ب) ۴   ج) ۵

د) ۶   هـ) ۸

۳. در یک جدول منظور از خانهٔ (i,j) $(i>0, j>0)$ خانه‌ای است که در سطر iام و ستون jام قرار دارد. یک زیر مجموعه S از خانه‌های جدول را یک «مجموعه زیبا» گوییم، اگر به‌ازای هر خانهٔ (a,b) متعلق به S، تمام خانه‌های (x,y) که $x \leq a$ و $y \leq b$ نیز در S باشند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر درست است؟

الف) خانهٔ $(1,1)$ عضو هر مجموعهٔ زیبا هست

ب) اعضای هر مجموعهٔ ناتهی زیبا تشکیل یک مستطیل می‌دهند که خانهٔ $(1,1)$ را در بر می‌گیرد

ج) هر اجتماعی از تعدادی مستطیل که همگی شامل $(1,1)$ باشند، یک مجموعهٔ ناتهی زیباست

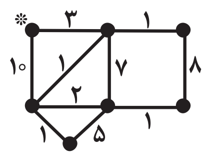
د) الف و ج

هـ) ب و ج

۴. با توجه به تعریف مجموعهٔ زیبا در مسألهٔ قبل، یک جدول ۳ × ۳ شامل چند مجموعهٔ زیباست؟

الف) ۹ ب) ۱۰ ج) ۱۱ د) ۱۹ ه) ۲۰

۵. تعدادی بمب در صفحه قرار داده شده و تعدادی فتیله آنها را مطابق شکل به یکدیگر متصل می‌کند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا پس از روشن شدن یک سر هر فتیله، فتیله به‌طور کامل بسوزد، روی آن نوشته شده است. با توجه به اطلاعات فوق چه مدت پس از منفجر شدن بمبی که در شکل با * مشخص شده است، تمام فتیله‌ها می‌سوزند؟ توجه داشته باشید کـه پس از سوخت کامل یک فتیله، بمب‌های هر دو سر آن اگر تا آن زمان منفجر نشده باشند، منفجر خواهند شد.



الف) ۷ ب) ۸ ج) ۹/۵ د) ۱۰/۵ ه) ۱۲

۶. در یک مسابقهٔ پینگ پنگ بین دو دبیرستان A و B، هر دانش‌آموز دبیرستان A با هر دانش‌آموز دبیرستان B یک مسابقه برگزار می‌کند. (مسابقهٔ پینگ‌پنگ تساوی ندارد.) یک دانش‌آموز «برندهٔ مطلق» محسوب می‌شود اگر او هر دانش‌آموز X از هر دو دبیرستان را یا مستقیماً ببرد، یا از دانش‌آموز دیگری مانند Y ببرد و Y از X برده باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) ممکن است برنده مطلق وجود نداشته باشد

ب) برندهٔ مطلق تمام بازی‌هایش را برده است

ج) اگر برندهٔ مطلق وجود داشته باشد حداکثر یک نفر است

د)به هیچ وجه برندهٔ مطلق وجود ندارد

ه) الف و ب و ج

۷. n تا عدد ۱ روی تخته سیاه نوشته شده است. در هر مرحله دو عدد a و b را از روی تخته پاک می‌کنیم و به‌جای آنها دو بار عدد $a + b$ را می‌نویسیم. بعد از چند مرحله، اعداد به n تا عدد n تبدیل شده‌اند. n کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۹

الف) ۱ و ۳ ب) ۲ و ۳ ج) فقط ۳ د) فقط ۲ ه) ۱ و ۲ و ۳

۸. دو منبع سوخت با شماره‌های ۱ و ۲ را در نظر بگیرید که ظرفیت هر کدام ۲۰ لیتر است. سه مصرف‌کننده با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ به‌ترتیب با مقدار مصرف ۱۲، ۱۲ و ۱۶ لیتر سوخت داریم. هزینهٔ انتقال هر واحد سوخت از منبع i به مصرف‌کنندهٔ j در سطر iام و ستون jام جدول زیر آمده است. حداقل هزینهٔ انتقال سوخت، برای این که هر مصرف‌کننده به‌اندازهٔ نیاز خود، سوخت دریافت کند، چه قدر است؟

	۱	۲	۳
۱	۱۰	۱	۳
۲	۶	۶	۹

الف) ۱۶۸

ب) ۱۷۲

ج) ۱۷۶

د) ۱۷۸

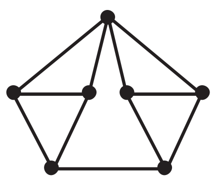
ه) ۱۸۰

۹. چهار مثلث متساوی‌الاضلاع یکسان را در نظر بگیرید. یک مثلث‌بندی یعنی به‌ترتیب کنار هم قرار دادن مثلث‌ها در صفحه، به‌طوری که هر مثلث حداقل در یک ضلع، با یکی از مثلث‌های قبلی مشترک باشد و با هیچ‌یک از آنها هم‌پوشانی نداشته باشد. تعداد مثلث‌بندی‌ها را بشمارید و در این شمارش، مثلث‌بندی‌هایی که با دوران در صفحه به هم تبدیل می‌شوند را یک بار در نظر بگیرید. این تعداد چندتاست؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵

د) ۶ ه) ۷

۱۰. تعدادی نقطه و پاره‌خط مانند شکل زیر موجود است. رنگ‌آمیزی نقاط را بدین ترتیب تعریف می‌کنیم: به هر نقطه یک رنگ نسبت می‌دهیم، به‌طوری که دو نقطه که با یک پاره‌خط به هم وصل شده‌اند، هم رنگ نباشند. گزینهٔ صحیح را انتخاب کنید.



الف) می‌توان نقاط را با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد

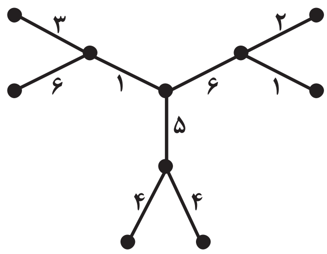
ب) می‌توان نقاط را با ۴ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد

ج) با حذف هر پاره‌خط، نقاط را می‌توان با ۳ رنگ، رنگ‌آمیزی کرد

د) الف و ب و ج

ه) ب و ج

۱۱. شکل مقابل نقشهٔ شهرهای یک کشور با جاده‌های بین آنها را نشان می‌دهد. در این نقشه، نقاط تو پر نشان‌دهندهٔ شهرها، و پاره‌خط‌های بین آنها نشان‌دهندهٔ جاده‌ها هستند. عددهای روی جاده‌ها، طول جاده‌ها برحسب کیلومتر رانشان می‌دهند. جهان‌گردی می‌خواهد از یکی از شهرها شروع کند و از همهٔ شهرها بازدید کند. او حداقل چند کیلومتر مسافت را باید طی کند؟



الف) ۴۵ ب) ۴۶ ج) ۴۷ د) ۴۸ ه) ۵۰

۱۲. در یک جمع ۵ نفری، هر نفر از یک مطلب اطلاع دارد که افراد دیگر از آن مطلب اطلاع ندارند. این افراد می‌توانند با هم جلسات ۳ نفری بگذارند و در هر جلسه همهٔ افراد جلسه، از مطالب هم‌دیگر اطلاع پیدا کنند. حداقل چند جلسه لازم است تا همه از همهٔ مطالب آگاهی پیدا کنند؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ ه) ۶

۱۳. تعدادی عدد روی تخته نوشته شده است. در هر مرحله دو تا از اعداد را پاک می‌کنیم و روی تخته قدرمطلق تفاضل آن دو را می‌نویسیم. در پایان تنها عدد صفر روی تخته باقی مانده است. اعداد اولیه کدام‌یک از حالت‌های زیر می‌تواند باشد؟

۱) ۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸ **۲) ۱، ۳، ۷، ۸، ۱۰، ۱۲** **۳) ۱، ۴، ۷، ۹، ۱۲، ۱۸**

الف) ۱ ب) ۱ و ۲ ج) ۲

د) ۳ و ۱ ه) ۳ و ۲ و ۱

۱۴. می‌خواهیم در خانه‌های جدول روبه‌رو ۴ مهره بگذاریم به‌قسمی که در هر خانه بیش از یک مهره قرار نگیرد و از هر دو خانه‌ای که با هم تنها در یک رأس مشترک هستند، لااقل یکی خالی باشد. به چند حالت می‌توان این کار را انجام داد؟

الف) ۳ ب) ۵ ج) ۶ د) ۹ ه) ۱۰

۱۵. ۷ نفر با شماره‌های ۱ تا ۷ در یک صف ایستاده‌اند. می‌دانیم بین افراد ۱ و ۵ یک نفر، بین افراد ۱ و ۷ سه نفر، بین افراد ۱ و ۳ یک نفر، بین افراد ۲ و ۴ یک نفر و بین افراد ۶ و ۴ یک نفر وجود دارد. این ۷ نفر به چند حالت می‌توانند در صف ایستاده باشند؟

الف) ۴ ب) ۸ ج) ۱۲

د) ۱۴ هـ) ۱۶

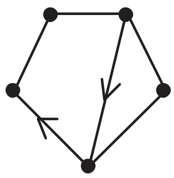
۱۶. در خانه‌های مربع مقابل به چند طریق می‌توان اعداد ۱ تا ۳ را قرار داد به‌قسمی که در هیچ سطر و هیچ ستون عدد تکراری نداشته باشیم؟

	۳	

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶

د) ۸ هـ) ۱۲

۱۷. در شکل زیر، هر نقطه را یک شهر و هر پاره‌خط را یک جاده بین دو شهر فرض کنید. بعضی از این جاده‌ها به‌صورت یک طرفه جهت‌دار شده‌اند. می‌خواهیم بقیهٔ این جاده‌ها را طوری به‌صورت یک طرفه جهت‌دار کنیم که از هیچ شهری نتوان با حرکت روی جاده‌ها، به خودش رسید. به چند طریق این کار ممکن است؟



الف) ۴ ب) ۶ ج) ۸

د) ۹ هـ) ۱۶

۱۸. دنبالهٔ $a_1 , a_2 , ... , a_n$ از اعداد متمایز، یک دنبالهٔ «۲ـ مرتب» نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $1 \le i \le n - 2$ داشته باشیم: $a_i < a_{i+2}$. اگر یک دنبالهٔ ۲ـ مرتب را به‌ترتیب صعودی مرتب کنیم، هر یک از عضوهای این دنباله حداکثر چند خانه جابه‌جا می‌شود؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x و $\lceil x \rceil$ یعنی کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر یا مساوی x)

الف) ۲ ب) ۳ ج) $\lfloor n/2 \rfloor$

د) $\lceil n/2 \rceil$ هـ) $n - 1$

۱۹. به‌ازای هر عدد ۷ رقمی در مبنای ۲ که اختلاف تعداد یک‌ها و تعداد صفرهای آن دقیقاً برابر یک باشد، یک نقطه روی صفحه درنظر می‌گیریم. بین هر دو نقطه که اعداد متناظر با آنها فقط در یک رقم متفاوت باشند، یک پاره‌خط رسم می‌کنیم. تعداد این پاره‌خط‌ها چندتاست؟

الف) صفر ب) ۳۵ ج) ۷۰ د) ۱۴۰ ه) ۱۲۲۵

۲۰. یک تاس یک مکعب است که روی ۶ وجه آن اعداد ۱ تا ۶ نوشته شده است، به‌قسمی که مجموع اعداد روی وجه‌های روبه‌رو ۷ باشد. چند نوع تاس متفاوت داریم؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۴ د) ۶ ه) ۸

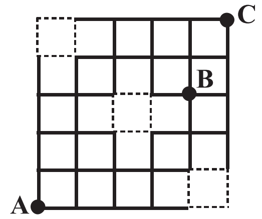
۲۱. دنبالهٔ $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ «متنوع» است، اگر $n = 0$ باشد یا

● هر دو عنصر متوالی دنباله متفاوت باشند و دنبالهٔ $a_0 , a_2 , a_4 , \dots , a_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ هم متنوع باشد.

چند دنبالهٔ متنوع برای $n = 6$ از اعداد ۰، ۱ و ۲ وجود دارد؟ ($\lfloor x \rfloor$ یعنی بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر یا مساوی x)

الف) ۳ ب) ۶ ج) ۱۲ د) ۲۴ ه) ۳۶

۲۲. در شکل زیر می‌خواهیم با حرکت از روی خطوط جدول، با شروع از نقطهٔ A به نقطهٔ B و نیز مجدداً با شروع از نقطهٔ A به نقطهٔ C برسیم. در هر حرکت می‌توان ۲ یا ۳ واحد به سمت چپ، راست، بالا یا پایین رفت و در ضمن نمی‌توان از خطوط خط‌چین عبور کرد. تعداد حداقل حرکت‌های لازم برای رسیدن از خانهٔ A بـه خانهٔ B و برای رسیدن از خانهٔ A به خانهٔ C به‌ترتیب چندتاست؟



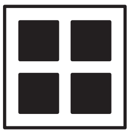
الف) ۳ و ۴ ب) ۴ و ۵ ج) ۵ و ۵ د) ۴ و ۴ ه) ۵ و ۴

۲۳. یک جدول ۸ × ۸ شامل اعداد طبیعی از مجموعهٔ ۱ تا n است، به‌طوری که عدد هر خانه از عدد خانهٔ سمت راست و خانهٔ بالایی آن (در صورت وجود) کوچک‌تر است. n لااقل چند است؟

الف) ۸ ب) ۹ ج) ۱۵

د) ۱۶ ه) ۳۲

۲۴. شکل زیر را در نظر بگیرید. می‌خواهیم تعدادی نقطهٔ اولیه در قسمت سفید شکل انتخاب کنیم، به‌قسمی که بتوان هر نقطه‌ای در قسمت سفید را با یک خط مستقیم به حداقل یکی از نقاط اولیه وصل کرد. این خط نباید از قسمت‌های سیاه شکل عبور کند.



حداقل تعداد نقاط اولیه چندتاست؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴
د) ۵ ه) ۶

۲۵. اعداد ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۴، ۱۵، ۱۶ و ۱۸ مجموع دوبه‌دوی ۵ عدد طبیعی متفاوت هستند. تعداد اعداد فرد در این ۵ عدد چندتاست؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ ه) ۵

۲۶. یک جدول ۱۰ × ۱ شامل اعداد ۱ تا ۱۰ است، و از هر عدد دقیقاً یک بار در جدول آمده است. در هر مرحله عدد i بین ۱ تا ۱۰ را انتخاب می‌کنیم و اگر محتوای خانهٔ iام جدول برابر j ($j \neq i$) بود، محتوای دو خانهٔ iام و jام را عوض می‌کنیم. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف) تعداد تعویض‌ها می‌تواند بی‌نهایت باشد
ب) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۱۰ است
ج) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۴۵ است
د) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۹ است
ه) تعداد تعویض‌ها حداکثر ۲۰ است

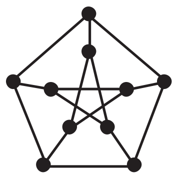
۲۷. به چند طریق می‌توان سه عدد متفاوت از میان اعداد صحیح ۱ تا ۹ انتخاب کرد که مجموع آنها بر سه بخش‌پذیر باشد؟

الف) ۲۷ ب) ۲۸ ج) ۳۰ د) ۴۵ ه) ۸۴

۲۸. شش عدد a، b، c، x، y و z داده شده است. می‌دانیم $a < b < c$ و $x < y < z$ این اعداد را به‌صورت صعودی مرتب می‌کنیم. سومین عدد، کدام‌یک از اعداد می‌تواند باشد؟

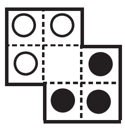
الف) y و b
ب) c و z
ج) همهٔ اعداد به‌جز x و a
د) همهٔ اعداد
ه) هیچ‌کدام از گزینه‌های فوق صحیح نیست

۲۹. شکل زیر نقشهٔ خیابان‌های یک شهر است، که تقاطع‌ها در آن با دایره‌های تو پر نشان داده شده‌اند. تعدادی پلیس و یک دزد هر کدام ابتدا در یک تقاطع (نه لزوماً متمایز) قرار دارند. دزد و هر یک از پلیس‌ها، با شروع از دزد، به‌نوبت حد فاصل دو تقاطع را طی می‌کنند. اگر یک پلیس بتواند در نوبت حرکتش، خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد، دزد را دستگیر می‌کند. حداقل به چند پلیس نیاز داریم تا به‌ازای هر موقعیت اولیه دزد و پلیس‌ها، مطمئن باشیم که می‌توانیم دزد را دستگیر کنیم؟



الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳
د) ۴ هـ) ۵

۳۰. سه مهرهٔ سیاه و سه مهرهٔ سفید در صفحه‌ای مانند شکل مقابل قرار دارند. دو خانه از این شکل که در یک ضلع یا در یک رأس با هم مشترک باشند را «مجاور» هم می‌نامیم. یک مهرهٔ A را می‌توان با یکی از حرکت‌های زیر جابه‌جا کرد:



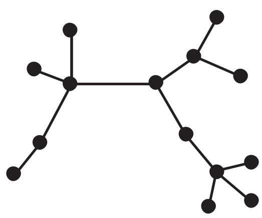
۱) A به خانهٔ مجاورش که خالی است برود.

۲) اگر مهرهٔ A، مهرهٔ B و خانهٔ خالی به همین ترتیب و در یک راستا (سطری، ستونی یا قطری) باشند، و رنگ B مخالف رنگ A باشد، A می‌تواند با پریدن از روی B به مکان خالی برود.

با حداقل چند حرکت می‌توان جای مهره‌های سیاه و سفید را عوض کرد؟

الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸ د) ۹ هـ) ۱۰

۳۱. می‌خواهیم به هر کدام از نقطه‌های تو پر در شکل مقابل، یکی از اعداد ۱ تا k را تخصیص دهیم به‌طوری که هر مسیری که دو نقطه با شماره‌های یکسانِ i را به هم وصل می‌کند، از حداقل یک نقطه با شمارهٔ بیشتر از i عبور کند. کم‌ترین مقدار k چه‌قدر است؟



الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۶

۳۲. تعداد زیرمجموعه‌های لااقل ۲ عضوی مجموعهٔ $\{۲۰ , ... , ۲ , ۱\}$ که مجموع هر دو عضو متمایز آنـها، از ۲۰ بزرگ‌تر باشد، چندتاست؟

الف) ۳۰۴۹ ب) ۳۰۷۰ ج) ۴۰۹۴ د) ۴۰۹۵ هـ) ۲۰۴۸

۳۳. یک «عبارت جالب» از نویسه‌های a و b به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

- **a، ab و ba هر کدام یک عبارت جالب‌اند.**
- **اگر $S_۱$ و $S_۲$ دو عبارت جالب باشند $S_۱S_۲$ نیز جالب است.**

کدام‌یک از عبارات زیر جالب است؟

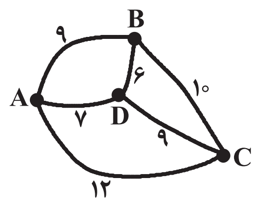
الف) abbaaaabba ب) aaabbabbab ج) bababbaab

د) الف و ب هـ) ب و ج

۳۴. کلیهٔ اعداد ۶ رقمی که با ارقام ۱ تا ۶ ساخته شده‌اند و هیچ رقم تکراری ندارند را از بزرگ به کوچک مرتب کرده‌ایم. عدد ۲۴۳۵۱۶ چندمین آنهاست؟

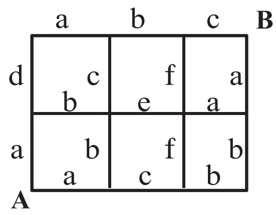
الف) ۱۷۵ ب) ۱۷۶ ج) ۱۷۷ د) ۵۴۳ هـ) ۵۴۴

۳۵. چهار شهر با جاده‌هایی مانند شکل زیر به هم وصل هستند. فاصلهٔ یک شهر تا یک شهر دیگر، به‌صورت عددی برحسب کیلومتر بر روی جاده‌ای که آن دو شهر را به هم وصل می‌کند نوشته شده است. می‌خواهیم تعدادی ایستگاه آتش‌نشانی روی جاده‌ها و یا در شهرها ایجاد کنیم، به‌طوری که برای هر شهر حداقل یک ایستگاه آتش‌نشانی در فاصلهٔ حداکثر ۶کیلومتری آن باشد. کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد کمترین تعداد ایستگاه‌های آتش‌نشانی و محل آنها درست است؟



الف) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AD و BC
ب) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های AD و AC
ج) ۲ ایستگاه بر روی جاده‌های BD و DC
د) ۳ایستگاه بر روی جاده‌های AB، BD و AC
هـ) الف و ب

۳۶. در شکل زیر با حرکت به سمت بالا و سمت راست بر روی پاره‌خط‌ها از A به B می‌رویم و در طول حرکت حرف‌های بر روی پاره‌خط‌ها را به‌ترتیب کنار هم می‌نویسیم. به این ترتیب، هر حرکت از A به B یک رشته تولید می‌کند. تعداد رشته‌های متفاوتی که به این طریق تولید می‌شوند چندتاست؟



الف) ۶ ب) ۷ ج) ۸

د) ۹ ه) ۱۰

۳۷. عدد A را «مولد» عدد B گوییم اگر A به‌علاوهٔ مجموع ارقامش برابر B شود. مثلاً ۲۷ مولد ۳۶ است، زیرا داریم: ۳۶ = ۷ + ۲ + ۲۷. اعداد ۱۰۱ و ۹۷ به‌ترتیب چند مولد دارند.

الف) ۲ و ۰ ب) ۱ و ۱ ج) ۱ و ۰

د) ۱ و ۲ ه) ۲ و ۲

۳۸. چند دنبالهٔ $a_۱, a_۲, \dots, a_{۱۳}$ از اعداد ۱ تا ۱۳ وجود دارد که هر عدد دقیقاً یک بار در آن ظاهر شده باشد و نیز a_i از $a_{۳i-۱}$ و $a_{۳i+۱}$ کوچک‌تر باشد؟

الف) $\binom{۱۲}{۴}^۲ \times ۶^۳$ ب) $\binom{۱۳}{۹}^۲ \times ۳^۳$ ج) $\binom{۱۲}{۴}^۲$

د) $۳^۳ \times ۲۴$ ه) $\binom{۱۳}{۹}^۲$

۳۹. شش وزنه با وزن‌های ۱، ۲، ۳، ۵، ۷ و ۹ کیلوگرم داده شده‌اند. به چند طریق می‌توان با انتخاب تعدادی از این وزنه‌ها و قرار دادن آنها در یک کفهٔ ترازو، یک جسم با وزن ۱۴ کیلوگرم را در کفهٔ دیگر وزن کرد؟

الف) ۳ ب) ۴ ج) ۵

د) ۶ ه) ۷

۴۰. پنج شهر A، B، C، D و E را در نظر بگیرید. قرار است به هر کدام از شهرهای A، B و C دو جاده و به هر یک از شهرهای D و E یک جاده متصل باشد. به چند طریق می‌توان این شهرها را با تعداد لازم جاده به هم وصل کرد

به‌طوری‌که به هر شهر به تعداد فوق جاده متصل باشد و نیز از هر شهر بتوان با حرکت روی جاده‌ها به تمام شهرهای دیگر رفت؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

سؤال‌های بله ـ خیر (۲۰ سؤال)

۴۱. در یک دنبالهٔ نوع A، عدد اول دنباله، دلخواه است و بعد از آن هر عدد به‌صورت حاصل‌ضرب مجموع ارقام عدد قبل در یکی از مقسوم‌علیه‌های همان عدد است. مثلاً عدد بعد از ۳۵ می‌تواند ۴۰ باشد، چون مجموع ارقام ۳۵ برابر ۸ است و ۵ یکی مقسوم‌علیه ۳۵ می‌باشد. آیا ممکن است در دنباله‌ای که با ۱۴۴ شروع می‌شود، عدد ۸۰۹۲ ظاهر شود؟

۴۲. در یک دنبالهٔ نوع B، عدد اول دلخواه است و بعد از آن هر عدد به‌صورت حاصل‌ضرب دو تا از مقسوم‌علیه‌های (نه لزوماً متمایز) عدد قبل از آن است. مثلاً عدد بعد از ۷۲ می‌تواند ۵۴ باشد چون ۹ و ۶ مقسوم‌علیه ۷۲ هستند. آیا ممکن است در دنباله‌ای که با ۱۸۰ شروع می‌شود عدد ۳۳۷۵ ظاهر شود؟

۴۳. سه مادهٔ اولیهٔ دارویی A، B و C را در نظر بگیرید. هر نوع دارو با نسبت مواد A، B و Cی موجود در آن مشخص می‌شود. مثلاً در داروی (۶ , ۵ , ۴) مواد A، B و C به‌ترتیب با نسبت‌های ۴، ۵ و ۶ مخلوط شده‌اند. می‌خواهیم ببینیم از یک مجموعهٔ دارو آیا می‌توان یک داروی مشخص جدید ساخت یا خیر. مثلاً از مجموعهٔ داروهای (۳ , ۵ , ۱) و (۶ , ۵ , ۴) می‌توان داروی (۵ , ۵ , ۳) را تولید کرد. برای این کار کافی است داروهای این مجموعه را با نسبت ۱ و ۲ ترکیب کنیم. آیا از مجموعهٔ داروهای (۱ , ۷ , ۳) و (۳ , ۲ , ۱) می‌توان داروی (۵ , ۴ , ۳) را ساخت؟

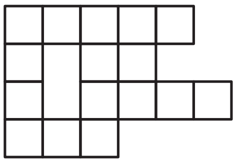
۴۴. بر روی دنبالهٔ $a_1 , a_2 , \dots , a_8$ اعمال زیر را به‌ترتیب انجام می‌دهیم:

۱) $a_1 , a_2 , \dots , a_5$ را به‌ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

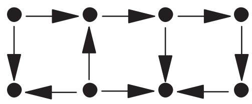
۲) $a_4 , a_5 , \dots , a_8$ را به‌ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

۳) $a_1 , a_2 , \dots , a_5$ را به‌ترتیب صعودی مرتب می‌کنیم.

آیا این دنباله حتماً به‌ترتیب صعودی مرتب شده است؟



۴۵. آیا می‌توان شکل مقابل را از روی خطوط برید، به‌طور که بتوان با قرار دادن دو تکهٔ به‌دست آمده در کنار هم یک مربع ۴×۴ ساخت؟ (منظور از برش، تقسیم شکل از روی خطوط به دو قسمت یک پارچه است.)

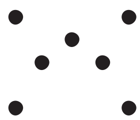


۴۶. آیا می‌توان به هر نقطهٔ شکل روبه‌رو، یک عدد طبیعی نسبت داد، به‌قسمی که اگر از نقطهٔ مربوط به عدد A، یک فلش به نقطهٔ مربوط به عدد B وجود داشته باشد، آنگاه A بر B بخش‌پذیر باشد؟

۴۷. بازی XO را به این صورت تعریف می‌کنیم: در یک مربع ۳ × ۳ بازی‌کن اول در نوبت خود یک X و بازی‌کن دوم یک O در جای خالی می‌گذارند. کسی بازی را می‌برد که یک سطر، یک ستون و یا یک قطر از مهره‌های خود به‌دست آورد. آیا بازی‌کن دوم می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برنده شود؟

۴۸. مجموعه‌ای از توپ‌ها با رنگ‌های قرمز و آبی رنگ‌آمیزی شده‌اند. به‌قسمی که از هر رنگ لااقل یک توپ داریم. این توپ‌ها یک کیلویی یا دو کیلویی هستند، به‌صورتی که از هر وزن لااقل یک توپ داریم. آیا لزوماً دو توپ یافت می‌شوند که هم از نظر رنگ و هم از نظر وزن متفاوت باشند؟

۴۹. نقطهٔ C را قرینهٔ نقطهٔ A، نسبت به نقطهٔ B می‌گوییم، در صورتی که B وسط AC باشد. در عمل قرینه کردن A نسبت به B، نقطهٔ A حذف و نقطهٔ C به شکل اضافه می‌شود. در شکل مقابل آیا می‌توان با انجام تعدادی عمل قرینه کردن نقطه‌ها نسبت به یکدیگر، مجموعهٔ رئوس یک ۷ ـ ضلعی محدب را به‌دست آورد؟



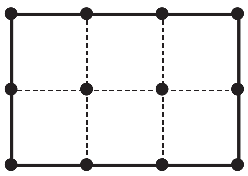
۵۰. یک جدول ۶ × ۱ را در نظر بگیرید که در هر خانهٔ آن یک سکه به رو قرار دارد. در هر مرحله دو خانهٔ مجاور را انتخاب کرده و سکه‌های موجود در آن خانه‌ها را پشت و رو می‌کنیم. این کار را آن‌قدر انجام می‌دهیم تا سکه‌های موجود در همهٔ خانه‌ها به پشت برگردند. در این صورت کار متوقف می‌شود. آیا کار پس از دقیقاً ۲۰ مرحله، می‌تواند متوقف شود؟

۵۱. یک جدول ۱۰ × ۱۰ مفروض است. دو نفر بازی زیر را انجام می‌دهند: هر بازی‌کن به نوبت یک عدد بین ۱ تا ۱۰ را در یکی از خانه‌های خالی جدول می‌نویسد، با این شرط که در سطر و ستونی که آن خانه قرار دارد قبلاً این عدد

نوشته نشده باشد. بازی‌کنی که در نوبت خود نتواند عددی در یکی از خانه‌های جدول بنویسد، بازنده و نفر دیگر برنده است. در صورتی که هر دو بازی‌کن بهترین حرکت خود را انجام دهند، آیا نفر دوم می‌تواند طوری بازی کند که همیشه برندهٔ بازی باشد؟

۵۲. مجموع دو عدد در مبنای معکوس به این صورت تعریف می‌شود: ابتدا ارقام دو عدد را معکوس می‌کنیم، سپس دو عدد را جمع می‌کنیم و سرانجام ارقام حاصل جمع را معکوس می‌کنیم. مثلاً مجموع ۱۰۳ و ۶۵ در مبنای معکوس برابر ۷۵۳ می‌باشد (۳۵۷ = ۵۶ + ۳۰۱) و نیز مجموع ۱۰۳ و ۹۵ در مبنای معکوس برابر ۶۳ است (۳۶۰ = ۵۹ + ۳۰۱). آیا ممکن است مجموع دو عدد طبیعی A و B در مبنای معکوس برابر یکی از آن دو (A یا B) شود؟

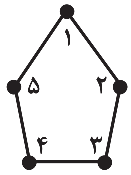
۵۳. در یک بازی دو نفره (نقطه بازی بدون جایزه و با کادر دور!) هر نفر در نوبت خود یکی از خطوط نقطه‌چین را پررنگ می‌کند. در هر نوبت به تعداد مربع‌هایی که بعد از حرکت یک بازی‌کن، تمام اضلاع آنها پررنگ شده‌اند، به وی امتیاز داده می‌شود. دو بازی‌کن یک در میان حرکت می‌کنند. در پایان، کسی که امتیاز بیشتری آورده باشد، برنده است. در شکل مقابل اگر هر دو بازی‌کن بهترین حرکت‌های ممکن را انجام دهند، آیا بازی‌کن اول می‌تواند همیشه برنده شود؟



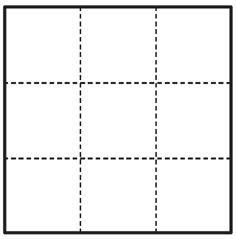
۵۴. یک جدول با اندازهٔ ۱۰ × ۱۰ با اعداد صفر، ۱و ۱- پر شده است. آیا چنین جدولی وجود دارد که مجموع اعداد هر سطر، هر ستون و هر یک از دو قطر آن همگی با هم متفاوت باشند؟

۵۵. در یک مهمانی ۱۴ نفر حضور دارند. می‌دانیم که هر یک از مهمان‌ها حداکثر ۴ نفر از مهمان‌های دیگر را می‌شناسد، و نیز می‌دانیم که بین این افراد دقیقاً ۲۱ مورد آشنایی دو جانبه وجود دارد. آیا حالتی وجود دارد که این افراد بتوانند به‌گونه‌ای دور یک میز بنشینند که هر کس نفر سمت راست خود را بشناسد و با نفر سمت چپ ناآشنا باشد؟

۵۶. می‌خواهیم به هر یک از رئوس ۵ ـ ضلعی زیر یک رنگ از سه رنگ a، b یا c را نسبت دهیم به‌طوری که رئوس دو سر یک ضلع هم‌رنگ نباشند. می‌دانیم که این رنگ‌آمیزی را می‌توان به‌صورت‌های مختلف انجام داد. حال می‌خواهیم برای رنگ‌آمیزی «محدودیت» ایجاد کنیم. هر محدودیت شامل یک شمارهٔ رأس و یک رنگ است و



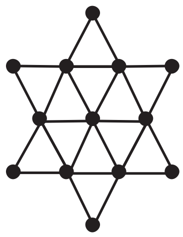
معنی آن، این است که رأس مذکور نمی‌تواند با آن رنگ، رنگ‌آمیزی شود. آیا می‌توان ۵ محدودیت برای این شکل ایجاد کرد به‌قسمی که با رعایت آنها رئوس ۵ ـ ضلعی دقیقاً به یک صورت رنگ‌آمیزی شود؟



۵۷. شکل مقابل را در نظر بگیرید. دو نفر بازی زیر را به این صورت انجام می‌دهند: ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط‌چین‌ها شکل را به دو قسمت تقسیم می‌کند و یکی از آنها را حذف کرده، دیگری را به نفر دوم می‌دهد. نفر دوم هم در امتداد یکی از خط‌چین‌ها آن را به دو قسمت می‌کند و یکی از آنها را حذف کرده، دیگری را به نفر اول می‌دهد. این عمل تکرار می‌شود تا زمانی که دیگر نتوان شکل را تقسیم کرد. بازی‌کنی که نتواند عمل تقسیم را انجام دهد بازنده است. در صورتی که هر دو بازی‌کن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می‌تواند برندهٔ بازی شود؟

۵۸. در شکل مسألهٔ قبل بازی دیگری به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم. ابتدا نفر اول در امتداد یکی از خط‌چین‌ها شکل را به دو قسمت تقسیم می‌کند. سپس نفر دوم یکی از قسمت‌ها را حذف می‌کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می‌کند. سپس نفر اول یکی از قسمت‌ها را حذف می‌کند و قسمت دیگر را به دو بخش تقسیم می‌کند. بازی به همین صورت ادامه می‌یابد تا زمانی که بازی‌کنی نتواند شکل را تقسیم کند و می‌بازد. در صورتی که هر دو بازی‌کن بهترین حرکات را انجام دهند، آیا نفر اول می‌تواند برندهٔ بازی شود؟

۵۹. شکل زیر نقشهٔ خیابان‌های یک شهر است. در یک تقاطع یک دزد و در تقاطعی دیگر یک پلیس قرار دارد. دزد و پلیس به نوبت (ابتدا دزد) از یک تقاطع به تقاطع مجاور (که بین‌شان یک خیابان فاصله است) می‌روند. اگر پلیس بتواند در نوبت حرکتش خود را به تقاطعی برساند که دزد در آن قرار دارد می‌تواند دزد را بگیرد. آیا با هر موقعیت دزد و پلیس در ابتدا، پلیس می‌تواند دزد را بگیرد؟



۶۰. رشتهٔ abbaaabb را در نظر بگیرید. در هر مرحله می‌توانیم به‌ازای یک iی دلخواه، جای حرف iام رشته را با حرف $i+2$ام رشته (در صورت وجود) عوض کنیم. آیا پس از تعدادی مرحله ممکن است به رشتهٔ abbaabab برسیم؟